ФГОС

Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, А. Ю. Петрович,
О. К. Подлипский, М. В. Рогатова, Б. В. Трушин

Алгебра

9 класс

Часть 2

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЮВЕНТА

Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, А. Ю. Петрович,
О. К. Подлипский, М. В. Рогатова, Б. В. Трушин

Алгебра

9 класс

Часть 2

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЮВЕНТА
Москва
2017

УДК 373:51
ББК 22.1я721
А 45

Образовательная система «Школа 2000...»

Непрерывный курс математики для дошкольников, начальной и средней школы «Учусь учиться»

***Научный руководитель* — Л. Г. Петерсон,**
доктор педагогических наук, профессор,
директор Центра системно-деятельностной педагогики
«Школа 2000...» ФГАОУ АПК и ППРО,
академик Международной академии наук педагогического образования,
лауреат Премии Президента РФ в области образования за 2002 год

Петерсон Л. Г., Агаханов Н. Х., Петрович А. Ю., Подлипский О. К., Рогатова М. В., Трушин Б. В.
А 45 Алгебра: 9 класс: В 2 ч. Ч. 2 / Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, А. Ю. Петрович, О. К. Подлипский, М. В. Рогатова, Б. В. Трушин. — М. : Издательство «Ювента», 2017. — 200 с. : ил.

ISBN 978-5-85429-646-5 (2-й завод)

Учебник предназначен для изучения школьного курса алгебры 9 класса на основном и предпрофильном (углубленном) уровнях. Ориентирован на развитие мышления и творческих способностей учащихся, формирование культуры исследовательской и проектной деятельности, умения учиться и готовности к саморазвитию.

Издание содержит разноуровневые задания, позволяющие сформировать прочную систему математических знаний, соответствующих современным требованиям ГИА, ЕГЭ и дающих возможность системной и качественной подготовки учащихся к математическим конкурсам и олимпиадам (на уроках и во внеурочной деятельности).

Реализует дидактическую систему деятельностного метода Л. Г. Петерсон («Школа 2000...»). Является составной частью непрерывного курса математики «Учусь учиться» для дошкольников, учащихся начальной и средней школы.

Может использоваться во всех типах школ и для индивидуального изучения курса алгебры 9 класса.

УДК 373:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-85429-646-5 (2-й завод)

Чтобы учебником было удобно пользоваться, в нем введены следующие обозначения:

К – задачи по новой теме для работы в классе,

Д – задачи для домашней работы,

П – повторение ранее пройденного,

С – задачи на смекалку,

– задания базового уровня,

– более сложные задания по новым темам и темам повторения,

* – задания, требующие умения находить нестандартные способы решения,

■ – завершение доказательства теоремы,

* * * – материал для тех, кому интересно.

Глава 4
Решение уравнений и неравенств высших степеней

§ 1. Развитие понятия корня

1. Корни высших степеней

В самой математике главные средства достигнуть истины — индукция и аналогия.

П. С. Лаплас (1749–1827),
французский математик, физик, астроном.

В восьмом классе мы познакомились с арифметическим квадратным корнем, который определяется как *неотрицательное* число, квадрат которого равен данному *неотрицательному* числу, а также со свойствами арифметического квадратного корня.

Однако для практических нужд введения квадратного корня из числа явно недостаточно. В этом пункте мы познакомимся с новыми математическими понятиями, связанными с числами.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача.

Какие размеры должен иметь аквариум кубической формы, объем которого равен 50 литрам?

Решение.

Приведем в соответствие единицы измерения величин: 50 л = 50 дм^3. Приняв длину стороны куба равной x (дм), получим уравнение $x^3 = 50$. Корнем данного уравнения является число, куб которого равен 50. Решение этого уравнения приводит нас к понятию *кубического* корня. Введем соответствующее определение.

***Определение* 1. Кубическим корнем из действительного числа a** называется такое действительное число x, что $x^3 = a$ (обозначается $x = \sqrt[3]{a}$).

При этом неотрицательность числа a уже не требуется, так как куб действительного числа может принимать не только положительные, но и отрицательные значения.

Поэтому $\sqrt[3]{1} = 1$, $\sqrt[3]{-1} = -1$ (так как $1^3 = 1$, $(-1)^3 = -1$); $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{-8} = -2$, $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{-27} = -3$, $\sqrt[3]{0{,}027} = 0{,}3$, $\sqrt[3]{-0{,}001} = -0{,}1$, $\sqrt[3]{\dfrac{64}{27}} = \dfrac{4}{3}$ и т.д. Конечно же, $\sqrt[3]{0} = 0$.

Вернемся к решению задачи об аквариуме. Ответ к ней можно записать как $\sqrt[3]{50}$. Заметим, что это число не является рациональным.

Кубический корень называют иначе корнем *третьей* степени, а арифметический квадратный корень из числа — корнем *второй* степени. Аналогично можно определить и корень любой степени $n \geqslant 2$. При этом корни четной степени ($n = 2, 4, 6, 8, \ldots$) и корни нечетной степени ($n = 3, 5, 7, 9, \ldots$) определяются по-разному (аналогично определению квадратного и кубического корней).

***Определение* 2.** Пусть $n = 2, 4, 6, 8, \ldots$ — четное натуральное число. **Арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного числа a** называется неотрицательное число x такое, что $x^n = a$ (обозначается $x = \sqrt[n]{a}$).

При записи знакомого нам арифметического корня второй степени, как мы помним, пишут не $\sqrt[2]{a}$, а просто $\sqrt{a}$, опуская двойку.

Так как любое действительное число после возведения в четную степень дает неотрицательный результат, то определять корень четной степени из отрицательного числа не имеет смысла. А вот уравнение $x^n = a$ при $a > 0$ и четном n наряду с положительным имеет и отрицательное решение. Например, уравнение $x^4 = 16$ имеет решения $x = 2$ и $x = -2$, так как $2^4 = 16$ и $(-2)^4 = 16$. Поэтому для однозначности определения корня имеет смысл ограничиться положительным значением, то есть ввести понятие *арифметического* корня. Таким образом, при определении арифметического корня четной степени все происходит так же, как при определении арифметического квадратного корня.

Приведем примеры арифметических корней четной степени: $\sqrt[4]{16} = 2$, $\sqrt[4]{81} = 3$, $\sqrt[6]{64} = 2$, $\sqrt[4]{1} = 1$, $\sqrt[8]{1} = 1$, $\sqrt[8]{6561} = 3$, $\sqrt[4]{0{,}0001} = 0{,}1$, $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$, $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$.

Выражение $\sqrt[6]{4}$ задает действительное, не являющееся рациональным, число, шестая степень которого равна 4. А, например, выражение $\sqrt[4]{-81}$ не имеет смысла.

***Определение* 3.** Пусть $n = 3, 5, 7, 9\ldots$ — нечетное натуральное число. **Корнем n-й степени из действительного числа a** называется действительное число x такое, что $x^n = a$ (обозначается $x = \sqrt[n]{a}$)[1].

Приведем примеры корней нечетной степени: $\sqrt[5]{32} = 2$, $\sqrt[5]{-32} = -2$, $\sqrt[7]{-1} = -1$, $\sqrt[7]{-128} = -2$, $\sqrt[9]{512} = 2$, $\sqrt[5]{243} = 3$, $\sqrt[5]{-1024} = -4$, $\sqrt[5]{0{,}00001} = 0{,}1$, $\sqrt[5]{-0{,}00001} = -0{,}1$, $\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{3}{5}$.

В дальнейшем мы не будем добавлять слово «арифметический» к корню n-й степени. Всегда будем иметь в виду, что корень четной степени из неотрицательного числа принимает неотрицательное значение, а корень нечетной степени из действительного числа принимает значение того же знака, что и само число. Существование корня n-й степени во всех этих случаях примем без доказательства (как и для квадратного корня). Отметим, что во всех этих случаях значение корня n-й степени единственно.

* * *

Докажем единственность значения корня n-й степени (аналогично тому, как доказывалась единственность квадратного корня). Сначала докажем следующее утверждение.

Теорема 1. Функция $y = x^n$ строго возрастает на $[0; +\infty)$ при четном натуральном n и строго возрастает на $(-\infty; +\infty)$ при нечетном натуральном n.

Доказательство.

Докажем методом математической индукции, что если $x_1 > x_2 > 0$, то $x_1^n > x_2^n$ при любом натуральном n. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть утверждение доказано при фиксированном натуральном n; докажем его для следующего значения $n + 1$. Пусть $x_1 > x_2 > 0$; тогда по

[1] Если $a \geqslant 0$, то соответствующее значение x называется арифметическим корнем n-й степени из a.

предположению индукции $x_1^n > x_2^n$. Вспомним известное свойство числовых неравенств: если $a > b > 0$ и $c > d > 0$, то $ac > bd$. Так как $x_1 > x_2 > 0$ и $x_1^n > x_2^n > 0$, то $x_1 \cdot x_1^n > x_2 \cdot x_2^n$, то есть $x_1^{n+1} > x_2^{n+1}$. Утверждение доказано при любом натуральном n методом математической индукции.

Ясно, что если $x > 0$, то и $x^n > 0$; если $x = 0$, то и $x^n = 0$. Поэтому если $x_1 > x_2 \geqslant 0$, то $x_1^n > x_2^n \geqslant 0$ при любом натуральном n.

Значит, функция $y = x^n$ строго возрастает на $[0; +\infty)$ при любом натуральном n; при четном n требуемое утверждение доказано.

Пусть теперь n — нечетное, и $x_1 > x_2$. Если $x_1 > x_2 \geqslant 0$, то $x_1^n > x_2^n \geqslant 0$ (уже доказано). Если $0 \geqslant x_1 > x_2$, то $-x_2 > -x_1 \geqslant 0$. По доказанному выше, $(-x_2)^n > (-x_1)^n$, т.е. $-x_2^n > -x_1^n$, и окончательно, $x_1^n > x_2^n$. Наконец, если $x_1 > 0 > x_2$, то $x_1^n > 0$, $x_2^n < 0$, и $x_1^n > x_2^n$. При любом расположении точек x_1 и x_2 на числовой прямой при условии $x_1 > x_2$ выполняется неравенство $x_1^n > x_2^n$. Значит, при нечетном натуральном n функция $y = x^n$ строго возрастает на $(-\infty; +\infty)$. ■

Теорема 2. Значение $\sqrt[n]{a}$ при четном натуральном n единственно для любого $a \geqslant 0$. Значение $\sqrt[n]{a}$ при нечетном натуральном n единственно для любого $a \in \boldsymbol{R}$.

Доказательство.

Пусть существуют два различных значения x_1 и x_2 для $\sqrt[n]{a}$, для определенности $x_1 > x_2$ ($x_1 > x_2 \geqslant 0$ для четного n; для нечетного n знаки чисел x_1 и x_2 роли не играют). Тогда, по предыдущему утверждению, $x_1^n > x_2^n$. Но $x_1^n = x_2^n = a$; полученное противоречие доказывает, что значение $\sqrt[n]{a}$ единственно. ■

Приведем основные **свойства корней.**

I. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ (при любых a, b, если n — нечетно; при $a, b \geqslant 0$, если n — четно).

Доказательство.

Пусть $x = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. Тогда $\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = a \cdot b$ (из определения корня следует, что $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, $\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b$). Так как $x^n = a \cdot b$, то $x = \sqrt[n]{ab}$ (это следует из единственности корня n-й степени). Итак, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. ■

II. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (при любых a, $b \neq 0$, если n — нечетно; при $a \geqslant 0$, $b > 0$, если n — четно).

Доказательство.

Пусть $x = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. Тогда $x^n = \left(\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \dfrac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \dfrac{a}{b}$. Так как $x^n = \dfrac{a}{b}$, то $x = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ (это следует из единственности корня n-й степени). Итак, $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$. ■

Свойства I и II аналогичны таким же свойствам квадратного корня. Напомним, что $\sqrt{a^{2k}} = |a^k|$ при любых натуральных k; при четных k модуль можно не писать, так как $a^k \geqslant 0$, и $\sqrt{a^{2k}} = a^k$. Аналогичное свойство имеет место для корней произвольной степени.

III. $\sqrt[n]{a^{kn}} = a^k$ при нечетных натуральных n и при любых $a \in \boldsymbol{R}$;

$\sqrt[n]{a^{kn}} = |a^k|$ при четных натуральных n и при любых $a \in \boldsymbol{R}$ (в частности, $\sqrt[n]{a^{kn}} = a^k$ при четных k и n и при любых $a \in \boldsymbol{R}$).

Доказательство.

Пусть n — нечетное натуральное число, $x = a^k$. Тогда $(a^k)^n = a^{kn}$. Так как $x^n = a^{kn}$, то $x = \sqrt[n]{a^{kn}}$ (это следует из единственности корня n-й степени). Итак, $a^k = \sqrt[n]{a^{kn}}$.

Пусть теперь n — четное натуральное число, $x = |a^k|$. Тогда $(|a^k|)^n = (|a|^k)^n = |a|^{kn} = a^{kn}$ (здесь учтена четность числа kn). Так как $x^n = a^{kn}$, и $x \geqslant 0$, то $x = \sqrt[n]{a^{kn}}$ (это следует из единственности корня n-й степени). Итак, $|a^k| = \sqrt[n]{a^{kn}}$. ■

Рассмотрим примеры применения этих свойств.

Пример 1.

Упростить: а) $\sqrt[4]{a^8}$; $\sqrt[3]{a^6}$; $\sqrt[3]{a^9}$; $\sqrt[4]{a^{12}}$; $\sqrt[6]{a^{30}}$; б) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}$; в) $\dfrac{\sqrt[4]{a^6}}{\sqrt[4]{a^2}}$.

Решение.

а) $\sqrt[4]{a^8} = a^2$; $\sqrt[3]{a^6} = a^2$; $\sqrt[3]{a^9} = a^3$; $\sqrt[4]{a^{12}} = |a^3|$; $\sqrt[6]{a^{30}} = |a^5|$ (по III свойству);

б) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a \cdot a^2} = \sqrt[3]{a^3} = a$ (по I и III свойствам);

в) $\dfrac{\sqrt[4]{a^6}}{\sqrt[4]{a^2}} = \sqrt[4]{\dfrac{a^6}{a^2}} = \sqrt[4]{a^4} = |a|$ (по II и III свойствам).

Извлечение корня степени m из корня степени n сводится к извлечению корня степени mn из исходного числа. Сформулируем это на математическом языке:

IV. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ для любого $a \in \boldsymbol{R}$, если m и n — нечетные натуральные числа. Если хотя бы одно из натуральных чисел m, n — четно, то $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ при всех $a \geqslant 0$.

Доказательство.

Пусть $x = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$. Тогда $(x^{mn}) = (x^m)^n = \left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right)^n = (\sqrt[n]{a})^n = a$. Так как $x^{mn} = a$, то $x = \sqrt[mn]{a}$ (это следует из единственности корня). Итак, $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$. ■

Пример 2.

Представить в виде корня n-й степени: $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}}$; $\sqrt[6]{\sqrt[3]{a}}$; $\sqrt[5]{\sqrt[4]{a}}$; $\sqrt[6]{\sqrt{a}}$.

Решение.

$\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}} = \sqrt[15]{a}$; $\sqrt[6]{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[18]{a}$; $\sqrt[5]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[20]{a}$; $\sqrt[6]{\sqrt{a}} = \sqrt[12]{a}$.

<u>Замечание.</u> Здесь и далее мы будем считать, что проводим преобразование при тех значениях переменной, при которых имеет смысл исходное выражение.

V. $\sqrt[kn]{a^k} = \sqrt[n]{a}$, если k — нечетное натуральное число (при всех $a \in \boldsymbol{R}$, если n нечетно, и при $a \geqslant 0$, если n — четно); $\sqrt[kn]{a^k} = \sqrt[n]{|a|}$, если k — четное натуральное число, при всех $a \in \boldsymbol{R}$.

Доказательство.

Пусть $x = \sqrt[kn]{a^k}$. Тогда $x^n = \left(\sqrt[kn]{a^k}\right)^n = \left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a^k}}\right)^n$ (по свойству IV). Далее, по определению корня n-й степени, $x^n = \sqrt[k]{a^k}$. Но $\sqrt[k]{a^k} = |a|$ при всех $a \in \boldsymbol{R}$, если k четно и, $\sqrt[k]{a^k} = a$ при всех $a \in \boldsymbol{R}$, если k — нечетно (это следует из свойства III, если в нем заменить k на 1, n на k). Из единственности корня следует теперь, что $x = \sqrt[n]{a}$, если k нечетно; $x = \sqrt[n]{|a|}$, если k четно. ■

Пример 3.

Представить в виде корня с меньшей степенью: $\sqrt[6]{a^3}$; $\sqrt[25]{a}$; $\sqrt[12]{a^4}$; $\sqrt[16]{a^4}$.

Решение.

$\sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a}$ при всех $a \geqslant 0$; $\sqrt[25]{a^5} = \sqrt[5]{a}$ при всех $a \in R$; $\sqrt[12]{a^4} = \sqrt[3]{|a|}$ при всех $a \in \boldsymbol{R}$; $\sqrt[16]{a^4} = \sqrt[4]{|a|}$ при всех $a \in \boldsymbol{R}$.

Следующее свойство обобщает свойства III и IV, оно аналогично сокращению дробей на общий множитель в числителе и знаменателе (для простоты мы будем рассматривать только случай $a \geqslant 0$, независимо от четности или нечетности показателей степени и корня).

VI. $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$, $m, n \in N$.

Доказательство.

Пусть $x = \sqrt[nk]{a^{mk}}$. Тогда $x^n = \left(\sqrt[nk]{a^{mk}}\right)^n = \sqrt[k]{a^{mk}} = a^m$ (это следует из определения корня и свойства III). Из единственности корня следует, что $x = \sqrt[n]{a^m}$. Итак, $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$. ■

Пример 4.

Представить в виде корня с меньшей степенью: $\sqrt[21]{a^{12}}$; $\sqrt[16]{a^{28}}$; $\sqrt[30]{a^{12}}$; $\sqrt[18]{a^{40}}$.

Решение.

Мы фактически сокращаем показатели степени корня и степени подкоренного выражения на общий множитель:

$\sqrt[21]{a^{12}} = \sqrt[7\cdot3]{a^{4\cdot3}} = \sqrt[7]{a^4}$; $\sqrt[16]{a^{28}} = \sqrt[4]{|a^7|}$; $\sqrt[30]{a^{12}} = \sqrt[5]{a^2}$; $\sqrt[18]{a^{40}} = \sqrt[9]{a^{20}}$.

VII. Если $x_1 > x_2$ и n — нечетное натуральное число, то $\sqrt[n]{x_1} > \sqrt[n]{x_2}$; если $x_1 > x_2 \geqslant 0$ и n — четное натуральное число, то $\sqrt[n]{x_1} > \sqrt[n]{x_2}$.

Пока примем это свойство без доказательства, оно будет доказано в последнем пункте этого параграфа.

Данное свойство позволяет нам сравнивать корни высших степеней.

Пример 5.

Сравните числа: а) $\sqrt[3]{13}$ и $\sqrt[3]{103}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$ и $\sqrt{\sqrt[3]{6}}$; в) $\sqrt[4]{0,999}$ и 1.

Решение.

а) $\sqrt[3]{13} < \sqrt[3]{103}$, так как $13 < 103$ (по свойству VII корня n-й степени);

б) $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5}$ и $\sqrt{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[6]{6}$. Значит, $\sqrt[3]{\sqrt{5}} < \sqrt{\sqrt[3]{6}}$, так как $\sqrt[6]{5} < \sqrt[6]{6}$ (по свойствам IV и VII корня n-й степени);

в) Можем записать $1 = \sqrt[4]{1^4} = \sqrt[4]{1}$. Значит, $\sqrt[4]{0,999} < 1$, так как $0,999 < 1$ (по свойству VII корня n-й степени).

Пример 6.

Сравните числа: а) $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{5}$ и $\sqrt[3]{11}$; в) $-\sqrt[4]{3}$ и $-\sqrt[8]{6\sqrt{2}}$.

Решение.

а) Так как $\left(\sqrt[3]{5}\right)^6 = 5^2 = 25$, а $\left(\sqrt{3}\right)^6 = 3^3 = 27$, то $\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{25}$; $\sqrt{3} = \sqrt[6]{27}$. Так как $25 < 27$, то $\sqrt[6]{25} < \sqrt[6]{27}$, то есть $\sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$ (по свойству VII корня n-й степени);

б) Так как $\left(\sqrt{5}\right)^6 = 5^3 = 125$, а $\left(\sqrt[3]{11}\right)^6 = 11^2 = 121$, то $\sqrt{5} = \sqrt[6]{125}$; $\sqrt[3]{11} = \sqrt[6]{121}$. Но $125 > 121$, поэтому $\sqrt[6]{125} > \sqrt[6]{121}$, то есть $\sqrt{5} > \sqrt[3]{11}$ (по свойству VII корня n-й степени);

в) $\left(\sqrt[4]{3}\right)^8 = 3^2 = 9$, $\left(\sqrt[8]{6\sqrt{2}}\right)^8 = 6\sqrt{2}$. Для сравнения данных чисел целесообразно возвести их в 16-ю степень: $\left(\sqrt[4]{3}\right)^{16} = 9^2 = 81$, $\left(\sqrt[8]{6\sqrt{2}}\right)^{16} = \left(6\sqrt{2}\right)^2 = 72$. Так как $81 > 72$, то по свойству VII $\sqrt[16]{81} > \sqrt[16]{72}$, то есть $\sqrt[4]{3} > \sqrt[8]{6\sqrt{2}}$; значит, $-\sqrt[4]{3} < -\sqrt[8]{6\sqrt{2}}$.

К **1** Какие из данных утверждений являются верными?

а) $\sqrt{81}=9$; в) $\sqrt{-25}=-5$; д) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=1-\sqrt{3}$;

б) $\sqrt{64\cdot 16}=32$; г) $\sqrt{9+16}=3+4$ е) $\sqrt{a^4-2a^2b^2+b^4}=a^2-b^2$.

Что вы использовали для выполнения задания?

2 Заполните таблицу:

a	0	1	−1	2	−2	3	−3	4	−4
a^3									
a^4									

Почему во второй строке таблицы есть и положительные, и отрицательные числа, а в третьей только неотрицательные?

3 Заполните таблицу:

d							
d^3	0	−1	8	−27	64	125	−216

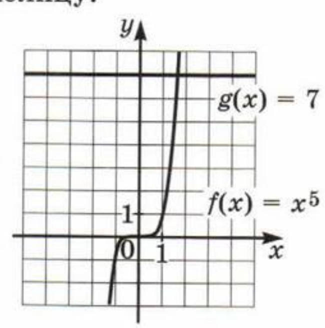
4 Заполните таблицу:

x								
x^3	−10	−9	−2	3	6	9	50	a

1) Можете ли вы записать значения переменной x? Как вы думаете, каким образом можно устранить возникшую проблему?

2) Прочитайте на стр. 3 о кубическом корне и заполните таблицу.

5 1) Проанализируйте рисунок и ответьте на вопросы: Сколько решений имеет уравнение $x^5=7$? Предположите, как можно записать корень этого уравнения.



2) Сопоставьте свое предположение с определением 3 на стр. 4 учебника и примените для решения уравнения $x^7=3$.

3) Познакомьтесь с понятием арифметического корня n-й четной степени.

6 Вычислите:

а) $\sqrt[3]{64\cdot 8}$; $\sqrt[3]{64}\cdot\sqrt[3]{8}$; б) $\sqrt[4]{0{,}0001\cdot 16}$; $\sqrt[4]{0{,}0001}\cdot\sqrt[4]{16}$; в) $\sqrt[5]{-32\cdot 243}$; $\sqrt[5]{-32}\cdot\sqrt[5]{243}$.

1) Что интересного вы наблюдаете? Сформулируйте гипотезу о свойстве корня n-й степени из произведения и докажите ее.

2) Сопоставьте свой вывод со свойством 1 на стр. 5 учебника и примените его для нахождения значения произведения $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{3}$.

7 Вычислите:

а) $\sqrt[4]{\dfrac{81}{625}}$; $\dfrac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{625}}$; б) $\sqrt[5]{-\dfrac{1}{32}}$; $\dfrac{\sqrt[5]{-1}}{\sqrt[5]{32}}$; в) $\sqrt[3]{2\dfrac{93}{125}}$; $\dfrac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{125}}$.

1) Что интересного вы наблюдаете? Сформулируйте гипотезу о свойстве корня n-й степени из частного и докажите ее.

2) Сопоставьте свой вывод со свойством 2 на стр. 5 учебника и примените его для нахождения значения частного $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$.

8 Вычислите значения $\sqrt[8]{8^8}$, $\sqrt[6]{(-6)^6}$, $\sqrt[4]{256}$, $\sqrt[6]{729}$, $\sqrt[4]{10000}$, $\sqrt[4]{0{,}0016}$, $\sqrt[6]{\frac{15625}{4096}}$.

9 Вычислите значения $\sqrt[9]{27^3}$, $\sqrt[7]{(-7)^7}$, $\sqrt[3]{216}$, $\sqrt[5]{-32}$, $\sqrt[7]{2187}$, $\sqrt[3]{-0{,}343}$, $\sqrt[5]{\frac{3125}{7776}}$.

10 Упростите: $\sqrt[16]{a^8}$; $\sqrt[3]{a^9}$; $\sqrt[4]{a^{20}}$; $\sqrt[5]{a^{30}}$; $\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a^3}$; $\frac{\sqrt[6]{a^4}}{\sqrt[6]{a}}$.

11 Представьте в виде корня n-й степени: $\sqrt[5]{\sqrt[7]{a}}$; $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}$; $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$.

12 Представьте в виде корня с меньшей степенью: $\sqrt[24]{a^{18}}$; $\sqrt[16]{a^{40}}$; $\sqrt[30]{a^{20}}$; $\sqrt[15]{a^{100}}$.

13 Сравните числа:

а) $\sqrt[3]{100}$ и $\sqrt[6]{1000}$; в) $\sqrt[4]{0{,}987}$ и $\sqrt[10]{1{,}234}$; д) $\sqrt{10}$ и $\sqrt[3]{30}$;

б) $\sqrt[3]{\sqrt{10}}$ и $\sqrt{\sqrt[3]{9}}$; г) $\sqrt[3]{9}$ и $\sqrt{5}$; е) $-\sqrt[4]{5}$ и $-\sqrt[8]{10\sqrt{6}}$.

14 Найдите наибольшее целое число, не превосходящее:

а) $\sqrt[3]{100}$; б) $\sqrt[7]{1234}$; в) $\sqrt[4]{600}$; г) $\sqrt[5]{-463}$.

15 Вычислите значение числового выражения

$$0{,}5\cdot\sqrt[3]{48}\cdot\sqrt[3]{1\frac{1}{3}}-\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}.$$

П **16** Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

а) $4 + 0{,}4 + 0{,}04 + 0{,}004 + \ldots$; б) $\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\ldots\ (|x|>1)$.

17 Представьте бесконечную десятичную периодическую дробь в виде обыкновенной дроби:

а) 1,7(5); б) 2,(18); в) 2,(134).

18 Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям:

а) $(x-5)^2+(y-4)^2=100$;

б) $(|x|-5)^2+(y-4)^2=100$;

в) $(|x|-5)^2+(|y|-4)^2=100$.

19 Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению: $x^2+y^2+2(x-y)+2=0$.

Д **20** Вычислите значения $\sqrt[4]{5^4}$, $\sqrt[6]{(-2)^6}$, $\sqrt[4]{0{,}0256}$, $\sqrt[6]{4096}$, $\sqrt[6]{64\,000\,000}$, $\sqrt[4]{0{,}0625}$, $\sqrt[4]{\frac{6561}{2401}}$.

21 Вычислите значения $\sqrt[3]{9^6}$, $\sqrt[5]{(-5)^5}$, $\sqrt[3]{729}$, $\sqrt[5]{-243}$, $\sqrt[7]{16\,384}$, $\sqrt[3]{-1{,}331}$, $\sqrt[5]{\frac{1024}{16\,807}}$.

22 Представьте в виде корня с меньшей степенью: $\sqrt[24]{a^{36}}$; $\sqrt[25]{a^{40}}$; $\sqrt[32]{a^{24}}$; $\sqrt[25]{a^{55}}$.

23 Сравните числа:

а) $\sqrt[3]{10}$ и $\sqrt[6]{10}$; в) $-\sqrt[3]{1{,}1}$ и $\sqrt[5]{-1{,}1}$; д) $\sqrt{20}$ и $\sqrt[3]{90}$;

б) $\sqrt[3]{\sqrt{15}}$ и $\sqrt{\sqrt[3]{25}}$; г) $\sqrt[3]{7}$ и $\sqrt{5}$; е) $-\sqrt[4]{7}$ и $-\sqrt[8]{15\sqrt{10}}$.

24 Найдите наибольшее целое число, не превосходящее:

а) $\sqrt[3]{1111}$; б) $\sqrt[7]{2345}$; в) $\sqrt[4]{650}$; г) $\sqrt[5]{-1000}$.

25 Представьте бесконечную десятичную периодическую дробь в виде обыкновенной дроби:

а) 0,(3); б) 5,(5).

26 Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям:

а) $5x = 6 - 2y$; б) $5|x| = 6 - 2y$; в) $5|x - 1| = 6 - 2y$.

C **27*** Существует ли такое число x, при котором все три числа $2x-\sqrt{x^2+2}$, $\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+2006}$, $\sqrt{x^2+2006}-x$ являются целыми?

2. Преобразование выражений, содержащих корни n-й степени.

Дороги не те знания, которые откладываются в мозгу, как жир, дороги те, которые превращаются в умственные мышцы.

Герберт Спенсер (1820–1903), английский философ и социолог

Свойства корней n-й степени, с которыми мы познакомились, позволяют производить и более сложные преобразования выражений, содержащих корни. Разберем некоторые способы проведения таких преобразований с помощью следующих примеров.

1. ***Вынесение множителя из-под знака корня.***

Аналогично случаю квадратного корня, если подкоренное выражение корня n-й степени представляется в виде произведения или частного чисел или выражений, среди которых есть точные n-е степени, то эти выражения выносятся из-под знака корня.

Пример 1. Вынести множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[4]{80}$; б) $\sqrt[5]{64}$; в) $\sqrt[3]{-16}$; г) $\sqrt[3]{\dfrac{128}{81}}$; д) $\sqrt[6]{\dfrac{512}{27}}$; е) $\sqrt[5]{-\dfrac{320}{243}}$.

Решение.

а) $\sqrt[4]{80}=\sqrt[4]{16\cdot5}=\sqrt[4]{2^4\cdot5}=\sqrt[4]{2^4}\cdot\sqrt[4]{5}=2\sqrt[4]{5}$; б) $\sqrt[5]{64}=\sqrt[5]{32\cdot2}=\sqrt[5]{2^5\cdot2}=\sqrt[5]{2^5}\cdot\sqrt[5]{2}=2\sqrt[5]{2}$;

в) $\sqrt[3]{-16}=-\sqrt[3]{8\cdot2}=-\sqrt[3]{2^3\cdot2}=-\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2}=-2\sqrt[3]{2}$; г) $\sqrt[3]{\dfrac{128}{81}}=\sqrt[3]{\dfrac{2^6\cdot2}{3^3\cdot3}}=\sqrt[3]{\dfrac{2^6}{3^3}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$;

д) $\sqrt[6]{\dfrac{512}{27}}=\sqrt[6]{\dfrac{2^6\cdot 2^3}{3^3}}=\dfrac{\sqrt[6]{2^6}\cdot\sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{3^3}}=\dfrac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=2\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; е) $\sqrt[5]{-\dfrac{320}{243}}=-\sqrt[5]{\dfrac{2^5\cdot 10}{3^5}}=-\dfrac{\sqrt[5]{2^5}\cdot\sqrt[5]{10}}{\sqrt[5]{3^5}}=-\dfrac{2}{3}\sqrt[5]{10}$.

Пример 2. Вынести множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[3]{32a^6b^5}$; б) $\sqrt[5]{-128x^5y^6}$; в) $\sqrt[7]{\dfrac{256a^9}{b^{14}}}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{32a^6b^5}=\sqrt[3]{2^3 2^2 a^6 b^3 b^2}=\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{a^6}\cdot\sqrt[3]{b^3}\cdot\sqrt[3]{b^2}=2a^2b\sqrt[3]{4b^2}$;

б) $\sqrt[5]{-128x^5y^6}=\sqrt[5]{(-32\cdot 4)x^5y^5y}=-2xy\sqrt[5]{4y}$;

в) $\sqrt[7]{\dfrac{256a^9}{b^{14}}}=\sqrt[7]{\dfrac{2^7\cdot 2\cdot a^7\cdot a^2}{b^{14}}}=\dfrac{2a}{b^2}\sqrt[7]{2a^2}$.

При вынесении множителей из-под знака четной степени часто нужно учитывать знак буквенных выражений под знаком корня или использовать знак модуля.

Пример 3. Вынести множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[4]{512a^5}$; б) $\sqrt[4]{81a^6b^5}$; в) $\sqrt[6]{-\dfrac{64a^8}{b^5}}$;

г) $\sqrt[4]{32a^8b^{10}}$; д) $\sqrt[4]{-\dfrac{64a^5}{b^9}}$; е) $\sqrt[8]{1024x^9y^{11}}$.

Решение.

а) $\sqrt[4]{512a^5}=\sqrt[4]{2^8\cdot 2\cdot a^4\cdot a}=\sqrt[4]{2^8}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{a^4}\cdot\sqrt[4]{a}=2^2\cdot\sqrt[4]{2}\cdot|a|\cdot\sqrt[4]{a}$. Так как выражение определено[2] только при $a\geqslant 0$, то $\sqrt[4]{512a^5}=4a\cdot\sqrt[4]{2a}$, $a\geqslant 0$.

б) Так как $\sqrt[4]{81a^6b^5}=\sqrt[4]{3^4a^4b^4a^2b}=\sqrt[4]{3^4}\cdot\sqrt[4]{a^4}\cdot\sqrt[4]{b^4}\cdot\sqrt[4]{a^2b}=3|a|\cdot|b|\sqrt[4]{a^2b}$ (a — любое), то $\sqrt[4]{81a^6b^5}=3b|a|\sqrt[4]{a^2b}$, так как $b\geqslant 0$.

в) $\sqrt[6]{-\dfrac{64a^8}{b^5}}=\sqrt[6]{-\dfrac{2^6a^6\cdot a^2b}{b^6}}=\dfrac{\sqrt[6]{2^6}\cdot\sqrt[6]{a^6}\cdot\sqrt[6]{-a^2b}}{\sqrt[6]{b^6}}=\dfrac{2|a|\cdot\sqrt[6]{-a^2b}}{|b|}$.

При $a\neq 0$ выражение определено только при $b<0$ (тогда $|b|=-b$), получим $-\dfrac{2|a|\cdot\sqrt[3]{|a|}\sqrt[6]{-b}}{b}$. При $a=0$ ($b\neq 0$) значение выражения равно 0.

г) $\sqrt[4]{32a^8b^{10}}=\sqrt[4]{2^4 2a^8b^8b^2}=\sqrt[4]{2^4}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{a^8}\cdot\sqrt[4]{b^8}\cdot\sqrt[4]{b^2}=2\sqrt[4]{2}a^2b^2\sqrt{|b|}$ (равенство верно при всех $a,b\in\boldsymbol{R}$).

д) $\sqrt[4]{-\dfrac{64a^5}{b^9}}=\sqrt[4]{-\dfrac{2^6a^4a}{b^8b}}=\dfrac{\sqrt[4]{2^6}\sqrt[4]{a^4}}{\sqrt[4]{b^8}}\cdot\sqrt[4]{-\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{2^3}|a|}{b^2}\sqrt[4]{-\dfrac{a}{b}}$. Было бы ошибкой в общем случае представлять $\sqrt[4]{-\dfrac{a}{b}}$ в виде $\dfrac{\sqrt[4]{-a}}{\sqrt[4]{b}}$ или $\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{-b}}$, так как при этом нарушается область

---

[2] Примечание: в условии не требовалось находить область определения этого выражения, однако мы указали, что $a\geqslant 0$, чтобы закончить преобразование раскрытием модуля. Договоримся поступать так и далее: если в условии не требуется искать область определения, то делать это по собственной инициативе мы не будем, считая, что работаем на области определения исходного выражения. Однако если для выполнения преобразования нам потребуется обратиться к области определения, мы будем делать соответствующие пометки (как в случае с примером 3а).

определения выражения. Выражение $\sqrt[4]{-\dfrac{a}{b}}$ определено для чисел a и b разного знака (или $a=0$, $b\neq 0$); выражение $\dfrac{\sqrt[4]{-a}}{\sqrt[4]{b}}$ — при $a\leqslant 0$, $b>0$.

Окончательно имеем: $\sqrt[4]{-\dfrac{64a^5}{b^9}}=\dfrac{2\sqrt{2}|a|}{b^2}\sqrt[4]{-\dfrac{a}{b}}$, если $\dfrac{a}{b}\leqslant 0$.

е) $\sqrt[8]{1024x^9y^{11}}=\sqrt[8]{2^8 2^2 x^8 xy^8 y^3}=\sqrt[8]{2^8}\cdot\sqrt[8]{2^2}\cdot\sqrt[8]{x^8}\cdot\sqrt[8]{y^8}\cdot\sqrt[8]{xy^3}=2\sqrt[4]{2}|x|\cdot|y|\cdot\sqrt[8]{xy^3}=2\sqrt[4]{2}|xy|\cdot\sqrt[8]{xy}=$ $=2\sqrt[4]{2}xy\cdot\sqrt[8]{xy^3}$. Выражение определено, если числа x, y одного знака или одно из них обращается в нуль, то есть при $xy\geqslant 0$ (поэтому $|xy|=xy$). Было бы ошибкой представить $\sqrt[8]{xy^3}$ в виде $\sqrt[8]{x}\cdot\sqrt[8]{y^3}$, так как это сузило бы область определения исходного выражения (последнее выражение определено, если одновременно $x\geqslant 0$ и $y\geqslant 0$).

2. Внесение множителя под знак корня.

Пример 4.

Внести множитель под знак корня: а) $2\sqrt[4]{6}$; б) $-2\sqrt[3]{7}$; в) $-3\sqrt[4]{2}$; г) $4\sqrt[5]{\dfrac{5}{128}}$.

Решение.

а) $2\sqrt[4]{6}=\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{6}=\sqrt[4]{96}$;

б) $-2\sqrt[3]{7}=\sqrt[3]{-8}\cdot\sqrt[3]{7}=\sqrt[3]{-56}$;

в) $-3\sqrt[4]{2}=-\sqrt[4]{81}\cdot\sqrt[4]{2}=-\sqrt[4]{162}$.

Заметим, что ответ в примере 4б) может быть записан как в виде $\sqrt[3]{-56}$, так и в виде $-\sqrt[3]{56}$; а вот в примере 4в) знак «минус» под корень внести нельзя, так как корень четной степени извлекается только из неотрицательного числа и принимает неотрицательные значения.

г) $4\sqrt[5]{\dfrac{5}{128}}=\sqrt[5]{1024}\cdot\sqrt[5]{\dfrac{5}{128}}=\sqrt[5]{\dfrac{1024\cdot 5}{128}}=\sqrt[5]{40}$.

Пример 5.

Внести множитель под знак корня: а) $3ab\sqrt[3]{a^2b}$; б) $-2xy^3\sqrt[5]{x^2y^4}$; в) $-xz\sqrt[7]{\dfrac{x^5}{z^2}}$.

Решение.

а) $3ab\sqrt[3]{a^2b}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{b^3}\sqrt[3]{a^2b}=\sqrt[3]{27a^5b^4}$;

б) $-2xy^3\sqrt[5]{x^2y^4}=-\sqrt[5]{32}\cdot\sqrt[5]{x^5}\cdot\sqrt[5]{y^{15}}\cdot\sqrt[5]{x^2y^4}=\sqrt[5]{-32x^7y^{19}}$;

в) $-xz\sqrt[7]{\dfrac{x^5}{z^2}}=-\sqrt[7]{x^7}\cdot\sqrt[7]{z^7}\cdot\sqrt[7]{\dfrac{x^5}{z^2}}=\sqrt[7]{-x^{12}z^5}$.

При внесении множителя под знак корня четной степени часто нужно учитывать знак соответствующего буквенного выражения.

Пример 6.

Внести множитель под знак корня: а) $x\sqrt[4]{x}$; б) $y\sqrt[6]{-y}$; в) $a^3b\sqrt[4]{ab^3}$; г) $a^2b\sqrt[4]{ab^2}$; д) $-ab\sqrt[6]{\dfrac{a^3}{b^4}}$; е) $a^2\sqrt[8]{-ab^2}$.

Решение.

а) Выражение определено при $x \geqslant 0$, поэтому $x=\sqrt[4]{x^4}$. Тогда $x\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{x^4}\cdot\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{x^5}$, $x \geqslant 0$.

б) Выражение определено при $y \leqslant 0$, поэтому $y=-|y|=-\sqrt[6]{(-y)^6}=-\sqrt[6]{y^6}$. Тогда $y\sqrt[6]{-y}=-\sqrt[6]{y^6}\cdot\sqrt[6]{-y}=-\sqrt[6]{-y^7}$, $y \leqslant 0$.

в) Выражение определено, если $ab^3 \geqslant 0$, то есть если числа a и b одного знака или хоть одно из них обращается в нуль. Тогда $a^3b \geqslant 0$ и $a^3b=\sqrt[4]{(a^3b)^4}=\sqrt[4]{a^{12}b^4}$. Поэтому $a^3b\sqrt[4]{ab^3}=\sqrt[4]{a^{12}b^4}\cdot\sqrt[4]{ab^3}=\sqrt[4]{a^{13}b^7}$, если $ab \geqslant 0$ (числа a и b одного знака или хоть одно из них обращается в нуль).

г) Выражение определено, если $ab^2 \geqslant 0$, то есть если $a \geqslant 0$ или $b=0$ (в последнем случае a — любое). При этом $b=|b|=\sqrt[4]{b^4}$, если $b>0$ и $b=-|b|=-\sqrt[4]{b^4}$, если $b<0$. Тогда при $b>0$ получим $a^2b\cdot\sqrt[4]{ab^2}=\sqrt[4]{a^8}\cdot\sqrt[4]{b^4}\cdot\sqrt[4]{ab^2}=\sqrt[4]{a^9b^6}$, а при $b<0$ получим $a^2b\cdot\sqrt[4]{ab^2}=\sqrt[4]{a^8}\cdot\left(-\sqrt[4]{b^4}\right)\cdot\sqrt[4]{ab^2}=-\sqrt[4]{a^9b^6}$. Итак,

$$a^2b\sqrt{ab^2}=\begin{cases}\sqrt[4]{a^9b^6}, \text{ если } b>0, a>0;\\ -\sqrt[4]{a^9b^6}, \text{ если } b<0, a>0.\end{cases}$$

Если $b=0$ или $a=0$, то равенство имеет место для обоих знаков.

д) Выражение определено, если $\dfrac{a^3}{b^4} \geqslant 0$, то есть если $a \geqslant 0$ и $b \neq 0$.

При этом $b=|b|=\sqrt[6]{b^6}$, если $b>0$, и $b=-|b|=\sqrt[6]{b^6}$, если $b<0$. Тогда при $b>0$ получим $-ab\sqrt[6]{\dfrac{a^3}{b^4}}=-\sqrt[6]{a^6}\cdot\sqrt[6]{b^6}\cdot\sqrt[6]{\dfrac{a^3}{b^4}}=-\sqrt[6]{a^9b^2}$, а при $b<0$ получим $-ab\sqrt[6]{\dfrac{a^3}{b^4}}=-\sqrt[6]{a^6}\cdot\left(-\sqrt[6]{b^6}\right)\cdot\sqrt[6]{\dfrac{a^3}{b^4}}=\sqrt[6]{a^9b^2}$.
Итак,

$$-ab\sqrt[6]{\frac{a^3}{b^4}}=\begin{cases}-\sqrt[6]{a^9b^2}, \text{ если } a>0, b>0;\\ \sqrt[6]{a^9b^2}, \text{ если } a>0, b<0.\end{cases}$$

Если $a=0$ и $b \neq 0$, то равенство имеет место для обоих знаков.

е) Выражение определено, если $ab^2 \leqslant 0$, то есть если $a \leqslant 0$ или $b=0$ (в последнем случае a — любое). Тогда $a^2\sqrt[8]{-ab^2}=\sqrt[8]{a^{16}}\cdot\sqrt[8]{-ab^2}=\sqrt[8]{-a^{17}b^2}$.

Итак, $a^2\sqrt[8]{-ab^2}=\sqrt[8]{-a^{17}b^2}$, если $a \leqslant 0$ или $b=0$.

3. Приведение радикалов к общему показателю.

Знак $\sqrt{\ }$ называется **радикалом** (от латинского слова radix — корень). Если имеется произведение или частное радикалов с различными показателями корня, то это выражение можно превратить в один радикал с показателем, равным наименьшему общему кратному всех имеющихся показателей (эта процедура основана на VI свойстве корня n-й степени и аналогична приведению к общему знаменателю при сложении или вычитании дробей).

Пример 7. Представить выражения в виде корня некоторой степени из рационального числа:

а) $\sqrt[3]{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[5]{12}}$; б) $\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[5]{-\dfrac{2}{15}}$; в) $\dfrac{\sqrt[6]{9}}{\sqrt[8]{10}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{2}{3}}$.

Решение.

а) Наименьшее общее кратное чисел 3, 2 и 5 равно 30, поэтому выражение можно привести к одному корню степени 30:

$$\sqrt[3]{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[5]{12}}=\sqrt[30]{3^{10}}\cdot\frac{\sqrt[30]{2^{15}}}{\sqrt[30]{12^{6}}}=\sqrt[30]{\frac{3^{10}\cdot 2^{15}}{12^{6}}}=\sqrt[30]{\frac{3^{10}\cdot 2^{15}}{3^{6}\cdot 4^{6}}}=\sqrt[30]{\frac{3^{4}\cdot 2^{15}}{2^{12}}}=\sqrt[30]{3^{4}\cdot 2^{3}}=\sqrt[30]{648}\,.$$

б) Наименьшее общее кратное чисел 4 и 5 равно 20, поэтому выражение можно привести к одному корню степени 20:

$$\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[5]{-\frac{2}{15}}=\sqrt[20]{5^{5}}\cdot\left(-\sqrt[20]{\frac{2^{4}}{15^{4}}}\right)=-\sqrt[20]{\frac{5^{5}\cdot 2^{4}}{15^{4}}}=-\sqrt[20]{\frac{5^{5}\cdot 2^{4}}{3^{4}\cdot 5^{4}}}=-\sqrt[20]{\frac{5\cdot 2^{4}}{3^{4}}}=-\sqrt[20]{\frac{80}{81}}\,.$$

в) Наименьшее общее кратное чисел 6, 8 и 4 равно 24, поэтому выражение можно привести к одному корню степени 24:

$$\frac{\sqrt[6]{9}}{\sqrt[8]{10}}\cdot\sqrt[4]{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt[24]{9^{4}}}{\sqrt[24]{10^{3}}}\cdot\sqrt[24]{\frac{2^{6}}{3^{6}}}=\sqrt[24]{\frac{9^{4}\cdot 2^{6}}{10^{3}\cdot 3^{6}}}=\sqrt[24]{\frac{3^{8}\cdot 2^{6}}{2^{3}\cdot 5^{3}\cdot 3^{6}}}=\sqrt[24]{\frac{2^{3}\cdot 3^{2}}{5^{3}}}=\sqrt[24]{\frac{72}{125}}\,.$$

Пример 8. Представить выражения в виде корня некоторой степени из рационального выражения: а) $\sqrt[3]{ab^{2}}\cdot\frac{\sqrt[6]{2a^{3}b}}{\sqrt[15]{4a^{2}b^{6}}}$; б) $\frac{\sqrt[4]{3a^{2}x}}{\sqrt[4]{5ax^{4}}}\cdot\sqrt[6]{a^{3}x^{2}}$; в) $\sqrt[5]{x^{3}y^{2}}\cdot\frac{\sqrt{2xy}}{\sqrt{x^{3}y^{6}}}$, считая величины a, b, x, y положительными.

Решение.

Положительность величин a, b, x, y нужна для того, чтобы не следить за возможным изменением области определения выражения (иногда может потребоваться дополнительное исследование знака окончательного выражения, не имеющее сейчас принципиального значения).

а) Наименьшее общее кратное чисел 3, 6 и 15 равно 30, поэтому выражение можно привести к одному корню степени 30:

$$\sqrt[3]{ab^{2}}\cdot\frac{\sqrt[6]{2a^{3}b}}{\sqrt[15]{4a^{2}b^{6}}}=\sqrt[30]{a^{10}b^{20}}\cdot\frac{\sqrt[30]{2^{5}a^{15}b^{5}}}{\sqrt[30]{4^{2}a^{4}b^{12}}}=\sqrt[30]{\frac{a^{10}b^{20}\cdot 2^{5}a^{15}b^{5}}{4^{2}a^{4}b^{12}}}=\sqrt[30]{2a^{21}b^{13}}\,.$$

б) Наименьшее общее кратное чисел 4 и 6 равно 12, поэтому выражение можно привести к одному корню степени 12:

$$\frac{\sqrt[4]{3a^{2}x}}{\sqrt[4]{5ax^{4}}}\cdot\sqrt[6]{a^{3}x^{2}}=\frac{\sqrt[12]{3^{3}a^{6}x^{3}}}{\sqrt[12]{5^{3}a^{3}x^{12}}}\cdot\sqrt[12]{a^{6}x^{4}}=\sqrt[12]{\frac{3^{3}a^{6}x^{3}\cdot a^{6}x^{4}}{5^{3}a^{3}x^{12}}}=\sqrt[12]{\frac{27}{125}\cdot\frac{a^{9}}{x^{5}}}\,.$$

в) Наименьшее общее кратное чисел 5, 2 и 4 равно 20, поэтому выражение можно привести к одному корню степени 20:

$$\sqrt[5]{x^{3}y^{2}}\cdot\frac{\sqrt{2xy}}{\sqrt[4]{x^{3}y^{6}}}=\sqrt[20]{x^{12}y^{8}}\cdot\frac{\sqrt[20]{2^{10}x^{10}y^{10}}}{\sqrt[20]{x^{15}y^{30}}}=\sqrt[20]{\frac{x^{12}y^{8}2^{10}x^{10}y^{10}}{x^{15}y^{30}}}=\sqrt[20]{\frac{1024x^{7}}{y^{12}}}\,.$$

4. Избавление от иррациональности в знаменателе* (*или числителе*) *дроби.

Аналогично случаю квадратного корня часто бывает удобно избавиться от знака корня в знаменателе дроби («избавиться от иррациональности»).

Пример 9.

Избавиться от иррациональности в знаменателях дробей:

а) $\frac{3}{\sqrt[3]{7}}$; б) $\frac{11}{\sqrt[4]{8}}$; в) $\frac{2}{\sqrt[3]{-5}}$; г) $\frac{ab}{\sqrt[6]{c^{5}}}$.

Решение.

Во всех этих случаях нужно умножить числитель и знаменатель дроби на корень из выражения, которое дополняло бы подкоренное выражение до полной n-й степени, например, в примере а) до $\sqrt[3]{7^3}$.

а) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{7}}=\dfrac{3\cdot\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{7^2}}=\dfrac{3\sqrt[3]{49}}{\sqrt[3]{7^3}}=\dfrac{3\sqrt[3]{49}}{7}$;

б) $\dfrac{11}{\sqrt[4]{8}}=\dfrac{11\cdot\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^3}\cdot\sqrt[4]{2}}=\dfrac{11\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^4}}=\dfrac{11\sqrt[4]{2}}{2}$;

в) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{-5}}=-\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}=-\dfrac{2\cdot\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5^2}}=-\dfrac{2\cdot\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}}=-\dfrac{2\cdot\sqrt[3]{25}}{5}$;

г) $\dfrac{ab}{\sqrt[6]{c^5}}=\dfrac{ab\cdot\sqrt[6]{c}}{\sqrt[6]{c^5}\cdot\sqrt[6]{c}}=\dfrac{ab\cdot\sqrt[6]{c}}{\sqrt[6]{c^6}}=\dfrac{ab\sqrt[6]{c}}{c}$, $c>0$.

Заметим, что аналогичным образом можно избавиться и от иррациональности в числителе.

К **28** Даны выражения $\sqrt[10]{32a^5}$, $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$, $\sqrt[12]{a^{10}b^6}$, $\sqrt[7]{a^{14}}$, $\sqrt[3]{\dfrac{a^{12}}{b^6}}$. Какие из них можно упростить? Упростите их.

29 Сравните числа:

а) $\sqrt{3}$ и $\sqrt[3]{4}$; б) $\sqrt[3]{4}$ и $\sqrt[4]{5}$; в) $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$ и $\sqrt[3]{\sqrt{19}}$.

Какие свойства вы использовали для выполнения задания?

30 1) Какое из чисел больше:

а) $3\sqrt{2}$ или $2\sqrt{3}$; б) $4\sqrt{5}$ или $2\sqrt{10}$; в) $6\sqrt{5}$ или $5\sqrt{8}$?

2) Вынесите из-под корня множители:

а) $\sqrt{121a^8b^5c^{19}}$; б) $\sqrt{256a^4b^9c^{21}}$.

31 1) Выпишите выражения, подчеркните множители, которые можно вынести из-под знака корня: $\sqrt[3]{27\cdot 3a^3\cdot a\cdot x^3\cdot x^2}$; $\sqrt[5]{32\cdot a^{10}\cdot x^5\cdot x^2}$.

2) Вынесите множители из-под знака корня. Какими свойствами корня n-й степени необходимо воспользоваться?

3) Сравните выполнение задания с решением примера 1 и 2 на стр. 10–11 учебника и примените для упрощения выражения $\sqrt[4]{625x^5y^6n^4}$.

32 Представьте выражение в виде корня некоторой степени из рационального числа, используя известные вам свойства корней:

а) $\sqrt[5]{7}\cdot\sqrt[10]{5}$; б) $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[5]{11}}$.

1) Сопоставьте показатели исходных корней и показатель корня, полученного в результате преобразования. Что интересного вы наблюдаете?

2) Сформулируйте вывод о способе приведения корней разной степени к корню одной степени, сопоставьте его со способом, который применили в примере 7 на стр. 13–14 учебника.

3) Может ли полученный вывод помочь в упрощении выражений: $\dfrac{\sqrt[4]{2a^2b^{3c}}}{\sqrt[6]{ab^3c^2}}$; $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[7]{-\dfrac{2}{24}}$? Упростите их.

33 Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[4]{2000}$; б) $\sqrt[5]{96}$; в) $\sqrt[3]{-250}$; г) $\sqrt[3]{\dfrac{625}{243}}$; д) $\sqrt[6]{\dfrac{128}{125}}$.

34 Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[3]{128a^5b^4}$; б) $\sqrt[5]{-512x^6y^{15}}$; в) $\sqrt[7]{\dfrac{4096a^{10}}{b^{35}}}$; г) $\sqrt[4]{81a^9}$; д) $\sqrt[4]{49a^9b^5}$.

35 Внесите множитель под знак корня:

а) $3\sqrt[4]{2}$; б) $-7\sqrt[3]{2}$; в) $-4\sqrt[4]{3}$; г) $6\sqrt[5]{\dfrac{3}{64}}$.

36 Внесите множитель под знак корня:

а) $4a^2b\sqrt[3]{a^4b}$; в) $-xyz\sqrt[3]{\dfrac{x^4}{yz^2}}$; д) $y^3\sqrt[6]{-y}$;

б) $-3x^3y^4\sqrt[7]{xy^6}$; г) $x^2\sqrt[4]{x^3}$; и) $-a^2b\sqrt[6]{\dfrac{a^5}{b^2}}$.

37 Представьте выражения в виде корня некоторой степени из рационального числа:

а) $\sqrt[5]{4}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{32}}$; б) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[5]{-\dfrac{5}{12}}$; в) $\dfrac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt[8]{18}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{3}{4}}$.

38 Избавьтесь от иррациональности в знаменателях дробей:

а) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{9}}$; б) $\dfrac{10}{\sqrt[4]{32}}$; в) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{-7}}$; г) $\dfrac{abc}{\sqrt[6]{c^7}}$.

П **39** Сравните числа: а) $\sqrt[4]{24}$ и $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{5}$ и $\sqrt[3]{9}$; в) $-\sqrt[4]{4}$ и $-\sqrt[8]{4\sqrt{2}}$.

40 Представьте в виде корня с меньшей степенью:

$\sqrt[24]{a^{20}}$; $\sqrt[14]{a^{21}}$; $\sqrt[30]{a^{35}}$; $\sqrt[15]{a^{30}}$.

41 Изобразите на координатной плоскости множества точек, координаты которых удовлетворяют условию:

а) $(x-3)(y-4)=1$; б) $|x|+|y-2|=3$; в) $(x-1)^2=-(y-2)^2$.

42 Упростите выражение $\sqrt{11}-\sqrt{3}-\dfrac{8}{\sqrt{14+2\sqrt{33}}}$.

Д **43** Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[4]{1250}$; б) $\sqrt[5]{5120}$; в) $\sqrt[3]{-12\,005}$; г) $\sqrt[3]{\dfrac{250}{243}}$; д) $\sqrt[6]{\dfrac{3645}{3584}}$.

44 Внесите множитель под знак корня:

а) $3\sqrt[4]{3}$; б) $-5\sqrt[3]{4}$; в) $-2\sqrt[4]{2}$; г) $12\sqrt[5]{\dfrac{3}{512}}$.

45 Внесите множитель под знак корня:

а) $3a^3b\sqrt[3]{2a^5b}$; в) $-xy^2z^3\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^5y^3z}}$; д) $-y^3\sqrt[6]{-y^5}$;

б) $-2x^2y^7\sqrt[7]{3x^2y^5}$; г) $x^3\sqrt[4]{-x^5}$; е) $ab\sqrt[6]{\dfrac{a^3}{b^8}}$.

46 Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[3]{162a^7b^2}$; б) $\sqrt[5]{-1280x^{13}y^7}$; в) $\sqrt[7]{\dfrac{10\,935a^8}{b^{70}}}$; г) $\sqrt[4]{-324a^{15}}$; д) $\sqrt[4]{125a^{11}b^5}$.

47 Представьте выражения в виде корня некоторой степени из рационального числа:

а) $\sqrt[5]{8}\cdot\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt[4]{2048}}$; б) $\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[5]{-\dfrac{1}{18}}$; в) $\dfrac{\sqrt[6]{8}}{\sqrt[8]{72}}\cdot\sqrt[4]{6}$.

48 Избавьтесь от иррациональности в знаменателях дробей:

а) $\dfrac{30}{\sqrt[3]{81}}$; б) $\dfrac{20}{\sqrt[4]{128}}$; в) $\dfrac{35}{\sqrt[3]{-49}}$; г) $\dfrac{ab}{\sqrt[6]{a^{13}}}$.

49 Сравните числа: а) $\sqrt[5]{10}$ и $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3\frac{1}{2}}$ и $\sqrt[3]{5\frac{1}{2}}$; в) $-\sqrt[4]{7}$ и $-\sqrt{2\sqrt{3}}$.

50 Изобразите на координатной плоскости множества точек, координаты которых удовлетворяют условию:

а) $(x-1)(y+2)=1$; б) $|x+1|-|y|=2$; в) $(1-x)^2=-(y-1)^2$.

C **51*** Докажите равенство[3]: $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$, если $a\geqslant\sqrt{b}$.

3.* Более сложные преобразования выражений, содержащих корни.

Если бы природа не была прекрасна, она не стоила бы того, чтобы ее знать... Я имею в виду ту более глубокую красоту, которая открывается в гармонии частей, которая постигается только разумом...

Жюль Анри Пуанкаре (1854–1912),
французский математик, механик, физик, философ

В этом пункте мы рассмотрим более сложные преобразования выражений, содержащих корни n-й степени.

1. Применение формул сокращенного умножения.

Вспомним, как мы избавлялись от иррациональности в знаменателе в выражениях с квадратным корнем. Если в знаменателе дроби имелась сумма или разность квадратных корней, то мы умножали числитель и знаменатель дроби на так называемое «сопряженное выражение» для последующего применения формулы разности квадратов, по которой $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$.

Например, $\dfrac{2-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}=\dfrac{(2-\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}=\dfrac{6-3\sqrt{2}-2\sqrt{2}+2}{3^2-(\sqrt{2})^2}=\dfrac{8-5\sqrt{2}}{7}$.

Аналогичные преобразования можно провести для корней более высоких степеней, применив формулы суммы и разности кубов и т.д. Например,

[3] Это равенство называется формулой сложного радикала.

$$\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right)=\left(\sqrt[3]{a}\right)^3-\left(\sqrt[3]{b}\right)^3=a-b;$$

$$\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b \text{ и т.д.}$$

Пример 1.

Избавиться от иррациональности в знаменателях дробей:

а) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}-1}$; б) $\dfrac{3+\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}+3}$; в) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt[4]{2}-1}$; г) $\dfrac{1}{\sqrt[6]{5}-1}$; д*) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{3}-1}$.

Решение.

а) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}-1}=\dfrac{2\left(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{2}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1\right)}=\dfrac{2\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-1}=2\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right);$

б) $\dfrac{3+\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}+3}=\dfrac{\left(3+\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{4^2}-\sqrt[3]{4}\cdot3+3^2\right)}{\left(\sqrt[3]{4}+3\right)\left(\sqrt[3]{4^2}-\sqrt[3]{4}\cdot3+3^2\right)}=\dfrac{\left(3+\sqrt[3]{2}\right)\left(2\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{4}+9\right)}{\left(\sqrt[3]{4}\right)^3+3^3}=$

$=\dfrac{6\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}-9\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{8}+27+9\sqrt[3]{2}}{31}=\dfrac{21+15\sqrt[3]{2}-7\sqrt[3]{4}}{31};$

в) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt[4]{2}-1}=\dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt[4]{2}+1\right)}{\left(\sqrt[4]{2}-1\right)\left(\sqrt[4]{2}+1\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt[4]{2}+1\right)}{\left(\sqrt[4]{2}\right)^2-1}=\dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt[4]{2}+1\right)}{\sqrt{2-1}}=\dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt[4]{2}+1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}=$

$=\dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2\left(\sqrt[4]{2}+1\right)}{2-1}=\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt[4]{2}+1\right);$

г) $\dfrac{1}{\sqrt[6]{5}-1}=\dfrac{\sqrt[6]{5}+1}{\left(\sqrt[6]{5}-1\right)\left(\sqrt[6]{5}+1\right)}=\dfrac{\sqrt[6]{5}+1}{\left(\sqrt[6]{5}\right)^2-1}=\dfrac{\sqrt[6]{5}+1}{\sqrt[3]{5}-1}=\dfrac{\left(\sqrt[6]{5}+1\right)\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{5}-1\right)\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1\right)}=$

$=\dfrac{\left(\sqrt[6]{5}+1\right)\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^3-1}=\dfrac{\left(\sqrt[6]{5}+1\right)\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1\right)}{4}.$

* * *

д*) Воспользуемся тем, что $(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1)=a^5-1$ для любых a (проверьте это самостоятельно), поэтому

$$\frac{1}{\sqrt[5]{3}-1}=\frac{\left(\sqrt[5]{3}\right)^4+\left(\sqrt[5]{3}\right)^3+\left(\sqrt[5]{3}\right)^2+\sqrt[5]{3}+1}{\left(\sqrt[5]{3}-1\right)\left(\left(\sqrt[5]{3}\right)^4+\left(\sqrt[5]{3}\right)^3+\left(\sqrt[5]{3}\right)^2+\sqrt[5]{3}+1\right)}=\frac{\sqrt[5]{81}+\sqrt[5]{27}+\sqrt[5]{9}+\sqrt[5]{3}+1}{2}.$$

Пример 2.

Избавиться от иррациональности в знаменателях дробей:

а) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$; б) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$; в) $\dfrac{a-1}{\sqrt[6]{a}-1}$; г) $\dfrac{1}{\left(\sqrt{a}+2\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{a}+4\right)}$.

Решение.

а) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\dfrac{a\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=\dfrac{a\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a-b};$

б) Если $a\neq b$, то $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}=\dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=$

$=\dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}{a-b};$

если же $a=b$, $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}=\dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a^3}}=\dfrac{\sqrt[4]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}}{a}=\dfrac{\sqrt[4]{a^5}}{a}=\sqrt[4]{a}$.

в) $\dfrac{a-1}{\sqrt[6]{a}-1}=\dfrac{(a-1)(\sqrt[6]{a}+1)}{(\sqrt[6]{a}-1)(\sqrt[6]{a}+1)}=\dfrac{(a-1)(\sqrt[6]{a}+1)}{\sqrt[3]{a}-1}=\dfrac{(a-1)(\sqrt[6]{a}+1)(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1)}{(\sqrt[3]{a}-1)(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1)}=$

$=\dfrac{(a-1)(\sqrt[6]{a}+1)(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1)}{a-1}=(\sqrt[6]{a}+1)(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1),\quad a\neq 1;$

г) Если $a\neq 4$ и $a\neq 8$, то домножим числитель и знаменатель дроби сразу на два сопряженных выражения:

$$\frac{1}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{a}+4)}=\frac{(\sqrt{a}-2)(\sqrt[3]{a}-2)}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)(\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{a}+4)(\sqrt[3]{a}-2)}=\frac{(\sqrt{a}-2)(\sqrt[3]{a}-2)}{(a-4)(a-8)};$$

если $a=4$, то $\dfrac{1}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{a}+4)}=\dfrac{1}{(2+2)(\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{2}+4)}=\dfrac{1}{4(2\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{2}+4)}=$

$=\dfrac{1}{16(\sqrt[3]{2}+1)}=\dfrac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{48};$

если $a=8$, то $\dfrac{1}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{a}+4)}=\dfrac{1}{(\sqrt{8}+2)(\sqrt[3]{64}+2\sqrt[3]{8}+4)}=\dfrac{1}{(2\sqrt{2}+2)(4+4+4)}=$

$=\dfrac{1}{24(\sqrt{2}+1)}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{24}.$

Комбинирование известных преобразований.

Упрощая выражения с квадратными корнями, мы иногда применяли сразу несколько различных преобразований: вынесение выражения из-под знака корня, возведение корня в степень и пр. Для упрощения выражений со знаком корня n-й степени мы тоже будем комбинировать известные нам преобразования.

Пример 3. Упростить выражения:

а) $\dfrac{1-\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}(a+1)-2\sqrt[3]{a^2}}$; б) $\dfrac{1-\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{x}-x}$; в) $\dfrac{1-2\sqrt[4]{5}+\sqrt{5}}{(\sqrt{3}-\sqrt[4]{45})^2}$.

Решение.

а) Так по условию $a>0$, то можем представить $\sqrt[3]{a^2}$ в виде:

$$\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[6]{a^4}=\sqrt[6]{a\cdot a^3}=\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt[6]{a^3}=\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt{a}.$$

Поэтому $\dfrac{1-\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}(a+1)-2\sqrt[3]{a^2}}=\dfrac{1-\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}(a+1)-2\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt{a}}=\dfrac{1-\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}(a+1-2\sqrt{a})}=\dfrac{1-\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}(1-\sqrt{a})^2}=$

$=\dfrac{1}{\sqrt[6]{a}(1-\sqrt{a})}$, где $a>0$, $a\neq 1$.

б) Так по условию $x>0$, то можем представить $\sqrt[4]{x^3}$ в виде:

$$\sqrt[4]{x^3}=\sqrt[4]{x\cdot x^2}=\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[4]{x^2}=\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt{x}.$$

Поэтому $\dfrac{1-\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{x}-x}=\dfrac{1-\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}=\dfrac{1-\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}=$

$=\dfrac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt[4]{x})}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}=\dfrac{1+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}},\quad x>0,\quad x\neq 1.$

в) Числитель дроби равен $1-2\sqrt[4]{5}+\sqrt{5}=1-2\sqrt[4]{5}+(\sqrt[4]{5})^2=(1-\sqrt[4]{5})^2$.

Знаменатель равен $\left(\sqrt[4]{9}-\sqrt[4]{9\cdot 5}\right)^2=\left(\sqrt[4]{9}\cdot\left(1-\sqrt[4]{5}\right)\right)^2=\left(\sqrt[4]{9}\right)^2\cdot\left(1-\sqrt[4]{5}\right)^2=\sqrt{9}\cdot\left(1-\sqrt[4]{5}\right)^2=$

$=3\left(1-\sqrt[4]{5}\right)^2$.

Поэтому $\dfrac{1-2\sqrt[4]{5}+\sqrt{5}}{\left(\sqrt{3}-\sqrt[4]{45}\right)^2}=\dfrac{\left(1-\sqrt[4]{5}\right)^2}{3\left(1-\sqrt[4]{5}\right)^2}=\dfrac{1}{3}$.

Выражения, которые содержат переменную под знаком корня, принято называть **иррациональными.** Рассмотрим примеры применения рассмотренных нами преобразований к упрощению подобных выражений.

Пример 4. Упростить выражения:

а) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a}-1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+1}+\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{a}}-\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}+1}$;

б) $\left(\dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{b^3}\right)\left(\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}\right)}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\dfrac{2}{a+b}$;

в) $\left(\sqrt[4]{a^2-2a+1}+\dfrac{a}{\sqrt{1-a}}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}-\dfrac{\sqrt{a+1}}{a-1}\right)$.

Решение.

а) Сгруппируем дроби с одинаковыми знаменателями:

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a}-1}+\frac{1}{1-\sqrt[3]{a}}=\frac{a}{\sqrt[3]{a}-1}-\frac{1}{\sqrt[3]{a}-1}=\frac{a-1}{\sqrt[3]{a}-1}=\frac{\left(\sqrt[3]{a}-1\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1\right)}{\sqrt[3]{a}-1}=\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1;$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+1}-\frac{\sqrt[3]{a^2}}{1+\sqrt[3]{a}}=\frac{1-\sqrt[3]{a^2}}{1+\sqrt[3]{a}}=\frac{\left(1-\sqrt[3]{a}\right)\left(1+\sqrt[3]{a}\right)}{1+\sqrt[3]{a}}=1-\sqrt[3]{a}.$$

Искомое выражение равно: $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1+1-\sqrt[3]{a}=2+\sqrt[3]{a^2}$.

б) Числитель первой дроби равен:

$$\left(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{b^3}\right)\left(\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}\right)=\left(\sqrt[4]{a^3}\right)^2-\left(\sqrt[4]{b^3}\right)^2=\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}=\left(\sqrt{a}\right)^3-\left(\sqrt{b}\right)^3=$$

$$=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\left(\sqrt{a}\right)^2+\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2\right).$$

Поэтому искомое выражение равно:

$$\left(\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\left(\sqrt{a}\right)^2+\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2-\sqrt{ab}\right)}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)\cdot\frac{2}{a+b}=(a+b)\cdot\frac{2}{a+b}=2.$$

в) Делимое равно $\sqrt[4]{a^2-2a+1}+\dfrac{a}{\sqrt{1-a}}=\sqrt[4]{(a-1)^2}+\dfrac{a}{\sqrt{1-a}}$.

Из условия следует, что $a<1$, поэтому $\sqrt[4]{(a-1)^2}=\sqrt[4]{(1-a)^2}=\sqrt{1-a}$,

и делимое равно $\sqrt{1-a}+\dfrac{a}{\sqrt{1-a}}=\dfrac{\left(\sqrt{1-a}\right)^2+a}{\sqrt{1-a}}=\dfrac{1-a+a}{\sqrt{1-a}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-a}}$.

Делитель равен $\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}-\dfrac{\sqrt{a+1}}{a-1}=\dfrac{a-1-\left(\sqrt{a+1}\right)^2}{\sqrt{a+1}(a-1)}=\dfrac{a-1-(a+1)}{\sqrt{a+1}(a-1)}=\dfrac{-2}{\sqrt{a+1}(a-1)}=$

$=\dfrac{2}{\sqrt{a+1}(1-a)}$.

Искомое выражение равно:

$$\frac{1}{\sqrt{1-a}}\cdot\frac{\sqrt{1+a}(1-a)}{2}=\frac{\sqrt{1+a}\left(\sqrt{1-a}\right)^2}{\sqrt{1-a}\cdot 2}=\frac{\sqrt{1+a}\cdot\sqrt{1-a}}{2}=\frac{\sqrt{1-a^2}}{2}.$$

Пример 5.

Упростить выражения: а) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}$; б*) $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$.

Решение.

а) Можно заметить, что $\left(3-2\sqrt{2}\right)^2=9-12\sqrt{2}+8=17-12\sqrt{2}$. Поэтому $\sqrt{3-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}=\sqrt[4]{17-12\sqrt{2}}\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}=\sqrt[4]{17^2-\left(12\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt[4]{289-144\cdot 2}=\sqrt[4]{1}=1$.

Иначе пример можно было решить, заметив, что $17+12\sqrt{2}=\left(3+2\sqrt{2}\right)^2$. Откуда получаем $\sqrt[4]{17+2\sqrt{2}}=\sqrt[4]{\left(3+2\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

Искомое выражение равно $\sqrt{3-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{\left(3-2\sqrt{2}\right)\cdot\left(3+2\sqrt{2}\right)}=\sqrt{9-8}=1$.

* * *

б*) Данное выражение можно упростить, используя различные способы. Рассмотрим их.

1-й способ.

Можно заметить, что $10+6\sqrt{3}=9+1+3\sqrt{3}+3\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}\right)^3+3\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2+3\cdot\sqrt{3}+1=\left(\sqrt{3}+1\right)^3$.

Аналогично $10-6\sqrt{3}=1-3\cdot\sqrt{3}+3\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^3=\left(1-\sqrt{3}\right)^3$.

Поэтому искомое выражение равно $\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}+1\right)^3}+\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{3}\right)^3}=\sqrt{3}+1+1-\sqrt{3}=2$.

2-й способ.

Пусть $x=\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}$, $y=\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$. Тогда искомое выражение равно $x + y$.

Рассмотрим выражение $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=x^3+y^3+3xy(x+y)=$ $=10+6\sqrt{3}+10-6\sqrt{3}+3\cdot\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}\cdot(x+y)=20+3\cdot(-2)\cdot(x+y)$.

Здесь мы заменили $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$ на -2, так как $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}=$ $=\sqrt[3]{\left(10+6\sqrt{3}\right)\left(10-6\sqrt{3}\right)}=\sqrt[3]{100-\left(6\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt[3]{100-108}=\sqrt[3]{-8}=-2$.

Значит, $(x+y)^3=20-6(x+y)$ и искомое выражение $x+y$ удовлетворяет уравнению $t^3=20-6t$, то есть $t^3+6t-20=0$.

Разложив на множители левую часть уравнения, получим:

$t^3-8+6t-12=(t-2)(t^2+2t+4)+6(t-2)=(t-2)(t^2+2t+10)$.

Так как квадратный трехчлен $t^2+2t+10$ не имеет корней ($D<0$), то уравнение $t^3+6t-20=0$ имеет единственный корень $t=2$. Поэтому искомое выражение равно 2.

К **52** Какие из данных утверждений являются верными?

а) $\sqrt{a}+2\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}=\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)^2$;

б) $a-b=\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)$;

в) $a+b=\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)$;

г) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$;

д) Если $a\geqslant 0$, то $a=\sqrt[4]{a^4}$;

е) $\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)=\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

53 1) Представьте число в виде квадрата:

а) 5; б) a; в) $\sqrt{3}$; г) $\sqrt[3]{b}$.

2) Представьте число в виде куба:

а) -3; б) b; в) $\sqrt{5}$; г) $\sqrt[3]{b}$.

54 Разложите на множители:

а) $27x^3-8$;

б) a^3+b^6;

в) a^4-b^4;

г) $a\sqrt{a}+b\sqrt{b}$;

д) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}$;

е) $\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}$;

ж) $\sqrt{a}-16\sqrt[4]{ab}+64\sqrt{b}$;

з) $\sqrt[3]{a}+8\sqrt[6]{ab}+16\sqrt[3]{b}$;

и) $a+3\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{b}+3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b^2}+b$.

55 Освободитесь от иррациональности в знаменателях дробей:

а) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$; б) $\dfrac{12}{x+2\sqrt{3}}$.

56 1) Освободитесь от иррациональности в знаменателях дробей:

а) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}$; б) $\dfrac{2}{2-\sqrt[3]{3}}$; в) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}}$.

2) Какие из верных утверждений № 52 потребуются для выполнения этого преобразования?

3) Проанализируйте выражения из пункта 1. Сформулируйте общий способ, с помощью которого можно избавиться от иррациональности в знаменателе во всех подобных случаях, сопоставьте его со способом, описанным на стр. 17.

57 Избавьтесь от иррациональности в знаменателях дробей:

а) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{4}-1}$; б) $\dfrac{1-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}+1}$; в) $\dfrac{\sqrt{3}+4}{\sqrt[4]{3}-2}$; г*) $\dfrac{1}{\sqrt[6]{2}-1}$.

58 Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}$.

59 Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{1}{\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{25}}$.

60 Упростите выражения:

а) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{a}}+\dfrac{2\sqrt[3]{a^2}}{a+2\sqrt[3]{a^2}}$;

б) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[8]{a}}{\sqrt[4]{a\sqrt{a}}-\sqrt[8]{a}}+\dfrac{\sqrt[8]{a}-1}{\sqrt{\sqrt{a}}-2\sqrt[8]{a}+4}\right):\dfrac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[8]{a}+1}$;

в) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{b}-\sqrt[4]{ab}}-\dfrac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{a}}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{ab^2}-\sqrt[4]{a^2b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$.

61 Упростите выражение $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$.

62 Упростите выражение $\sqrt{t+6\sqrt{t-9}}+\sqrt{t-6\sqrt{t-9}}$ $(9 \leqslant t \leqslant 18)$.

63 Докажите равенство $\sqrt[3]{6+\sqrt{\dfrac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\dfrac{847}{27}}}=3$.

П **64** Представьте выражение в виде корня некоторой степени из рационального числа:

а) $\sqrt[6]{3}\cdot\sqrt{3}$; б) $\dfrac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{2}}$.

65 Избавьтесь от иррациональности в знаменателях дробей:

а) $\dfrac{3}{\sqrt[4]{2}}$; б) $\dfrac{11}{\sqrt[3]{5}}$; в) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{-3}}$; г) $\dfrac{n}{\sqrt[3]{n^2}}$.

66 Найдите область определения функций:

а) $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{x+4}$; б) $y=\sqrt{-x-1}+\dfrac{2}{1+x}$; в) $y=\sqrt{\dfrac{3-x}{2+x}}$.

67 Найдите область определения функции, постройте ее график и укажите множество ее значений:

а) $y = 2\sqrt{1-3x} + 3$; б) $y = |\,1 - |\,x\,|\,|$.

Д **68** Избавьтесь от иррациональности в знаменателях дробей:

а) $\dfrac{12}{\sqrt[3]{9}-1}$; б) $\dfrac{1+\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}+2}$; в) $\dfrac{\sqrt{5}-4}{\sqrt[4]{5}-2}$; г*) $\dfrac{1}{\sqrt[6]{4}-1}$.

69 Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

70 Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}+2}$.

71 Упростите выражение $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$.

72 Упростите выражения:

а) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[6]{8}$; б) $\sqrt[5]{2}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[15]{2}}$.

73 Найдите область определения функции, постройте ее график и укажите множество ее значений:

а) $y = 2-\sqrt{1+2x}$; б) $y = \left|2-\sqrt{1-2x}\right|$; в) $y = \dfrac{1}{2-\sqrt{1+2x}}$.

С **74*** Найдите значение суммы $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.

75* Докажите равенство: $\sqrt[4]{\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}}-\sqrt[4]{\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}}=1$.

4. Функция $y=\sqrt[n]{x}$ и ее график

В одном мгновении увидеть вечность,
Огромный мир — в зерне песка,
В единой горсти — бесконечность
И небо — в чашечке цветка.

У. Блейк (1757–1827),
английский поэт, художник

В 8 классе мы уже изучили свойства функции $y=\sqrt{x}$. В этом пункте мы познакомимся с более общим ее случаем — функцией $y=\sqrt[n]{x}$. Точно так же, как при изучении свойств функции $y=\sqrt{x}$ нам помогали знания о функции $y = x^2$, при изучении свойств $y=\sqrt[n]{x}$ нам поможет функция $y = x^n$.

Вспомним, что нам известно о графике степенной функции $y = x^n$. При четном n — это кривая, напоминающая параболу $y = x^2$, только быстрее растущая при неограниченном увеличении x по модулю (если $n \geqslant 4$) и теснее прилегающая к оси Ox при x, очень малых по модулю (рис. 1а). Аналогично график функции $y = x^n$ при нечетном натуральном n напоминает кривую $y = x^3$ с такими же замечаниями насчет роста при неограниченном увеличении x по модулю и прилегания к оси Ox при x, очень малых по модулю (рис. 1б).

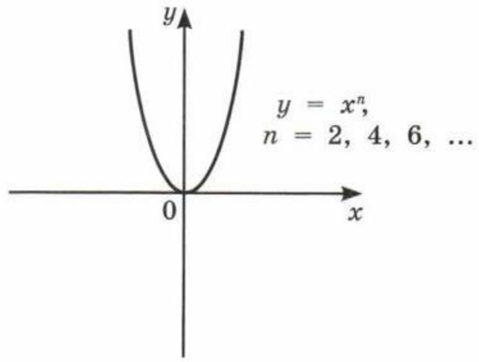


Рис. 1а

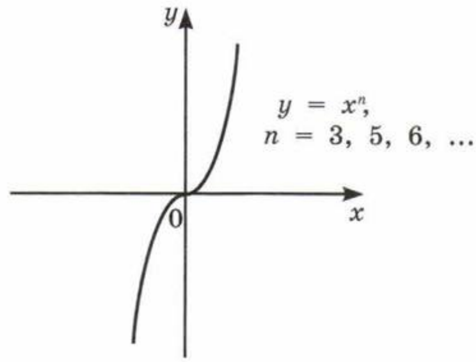


Рис. 1б

Теперь мы готовы к изучению функции $y=\sqrt[n]{x}$. Начнем с построения ее графика. Построим график $y=\sqrt[n]{x}$ по точкам для простейшего неизученного нами случая — для $n = 3$.

Заполним таблицу:

x	0	$\pm\frac{1}{8}$	±1	$\pm\frac{27}{8}=\pm3\frac{3}{8}$	±8
y	0	$\pm\frac{1}{2}$	±1	$\pm\frac{3}{2}=\pm1\frac{1}{2}$	±2

Построим кривую по точкам с указанными в таблице координатами. График $y=\sqrt[3]{x}$ изображен на рис. 2.

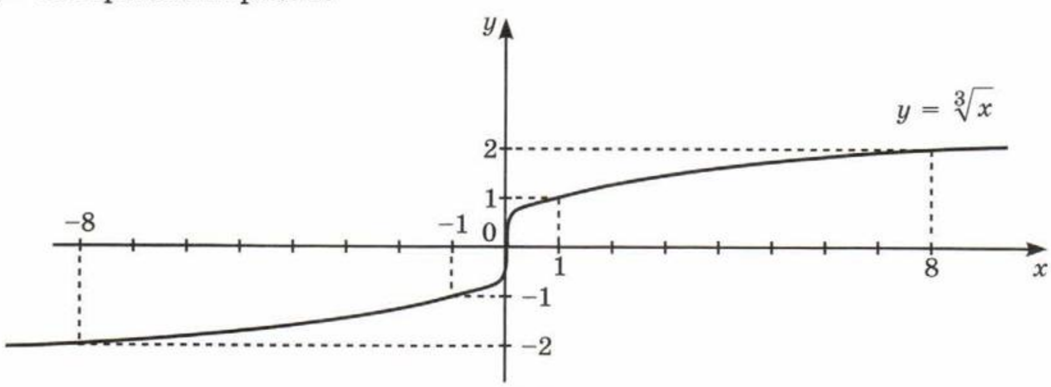


Рис. 2

Можно заметить, что эта кривая симметрична графику $y = x^3$ относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. Подобную картину мы наблюдали и для $y=\sqrt{x}$ — ее график является правой ветвью параболы, которую симметрично отобразили относительно этой биссектрисы.

Действительно, равенство $y = x^n$ при *нечетном* натуральном n равносильно $x=\sqrt[n]{y}$. Поэтому для построения графика $y=\sqrt[n]{x}$ достаточно в графике $y = x^n$ поменять местами x и y, то есть отразить его симметрично относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. График $y = x^n$ изображен на рис. 3.

Равенство $y = x^n$ при *четном* натуральном n равносильно $x=\sqrt[n]{y}$, только если $x \geqslant 0$. Значит, если мы хотим построить график $y=\sqrt[n]{x}$, то нужно отразить симметрично относительно биссектрисы первого координатного угла только правую («положительную») часть кривой $y = x^n$ (рис. 4).

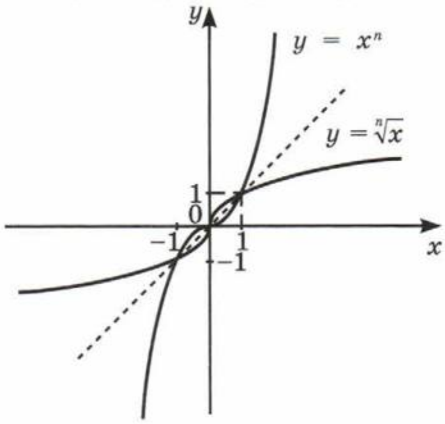


Рис. 3

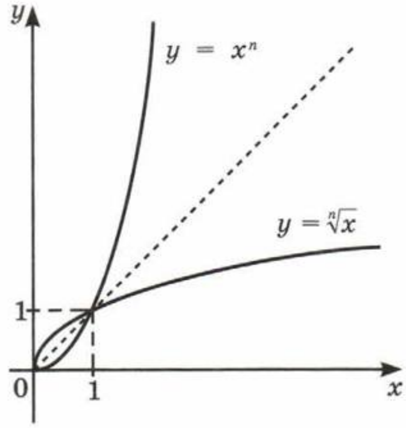


Рис. 4

Если построить график $y=\sqrt[n]{x}$ по точкам (например, для $n = 4$), то, естественно, получится такая же картина.

x	0	$\frac{1}{16}$	1	$\frac{81}{16}=5\frac{1}{16}$	16
y	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$	2

График $y=\sqrt[4]{x}$ изображен на рисунке 5.

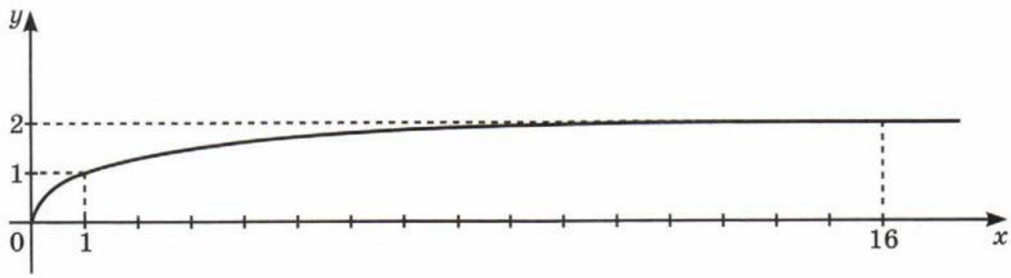


Рис. 5

Теперь сформулируем **основные свойства функции** $y=\sqrt[n]{x}$.

1. Область определения функции $y=\sqrt[n]{x}$:
- при нечетном натуральном n: $D(y) = (-\infty; +\infty)$;
- при четном натуральном n: $D(y) = [0; +\infty)$.

2. Область значений функции $y=\sqrt[n]{x}$:
- при нечетном натуральном n: $E(y) = (-\infty; +\infty)$;
- при четном натуральном n: $E(y) = [0; +\infty)$.

3. Функция $y=\sqrt[n]{x}$ равна нулю при $x = 0$.

Функция $y=\sqrt[n]{x}$ при нечетном натуральном n положительна при $x > 0$ и отрицательна при $x < 0$.

Функция $y=\sqrt[n]{x}$ при четном натуральном n положительна при $x > 0$.

4. Функция $y=\sqrt[n]{x}$ строго возрастает на своей области определения, то есть на $(-\infty; +\infty)$ при нечетном натуральном n и на $[0; +\infty)$ при четном натуральном n.

Доказательство (методом от противного).

Если наше утверждение неверно, то найдутся x_1 и x_2 такие, что $x_1 > x_2$, но $\sqrt[n]{x_1} \leqslant \sqrt[n]{x_2}$ (при нечетном натуральном n), или $x_1 > x_2 \geqslant 0$, но $\sqrt[n]{x_1} \leqslant \sqrt[n]{x_2}$ (при четном натуральном n; в этом случае $0 \leqslant \sqrt[n]{x_1} \leqslant \sqrt[n]{x_2}$). Так как функция x^n строго возрастает на $(-\infty; +\infty)$ при нечетном натуральном n и строго возрастает на $[0; +\infty)$ при четном натуральном n, то в любом случае $\left(\sqrt[n]{x_1}\right)^n \leqslant \left(\sqrt[n]{x_2}\right)^n$, то есть $x_1 \leqslant x_2$. А это противоречит тому, что $x_1 > x_2$. Значит, функция $y = \sqrt[n]{x}$ строго возрастает на своей области определения. ■

5. Функция $y = \sqrt[n]{x}$ при нечетном натуральном n нечетна, а при четном натуральном n не является ни четной, ни нечетной.

Доказательство.

1) Рассмотрим функцию $y = \sqrt[n]{x}$ при нечетном натуральном n. Ее нечетность следует из того, что при всех x: $\sqrt[n]{-x} = \sqrt[n]{(-1) \cdot x} = \sqrt[n]{-1} \cdot \sqrt[n]{x} = (-1) \cdot \sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{x}$.

2) Функция $y = \sqrt[n]{x}$ при четном натуральном n определена при $x \in [0; +\infty)$. Ее область определения несимметрична относительно точки 0 на числовой прямой, поэтому она не может быть ни четной, ни нечетной. ■

Свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$, как и свойства любой другой функции, имеют свое применение. Например, свойство возрастания функции может быть сформулировано иначе: если $x_1 > x_2$ и n — нечетное натуральное число, то $\sqrt[n]{x_1} > \sqrt[n]{x_2}$; если $x_1 > x_2 \geqslant 0$ и n — четное натуральное число, то $\sqrt[n]{x_1} > \sqrt[n]{x_2}$. Данное свойство было указано в пункте 4.1.1. (свойство VII) и использовалось нами для сравнения корней высших степеней.

К **76** Какие из данных выражений не имеют смысла?
$\sqrt{-9}$; $\sqrt[3]{-8}$; $\sqrt[4]{-0,25}$; $\sqrt[7]{-2}$; $\sqrt[5]{-1}$; $\sqrt[6]{-81}$.

77 Начертите график функций $y = \sqrt{x}$. Определите с его помощью приблизительные значения $\sqrt{3}$ и $\sqrt{7}$. Сравните числа $\sqrt{3,6}$ и $\sqrt{3,9}$, используя график. Какое свойство функции при этом используется?

78 1) Объем куба со стороной a см составляет V см³. Запишите формулу зависимости a в см от V см³.

2) Можно ли вычислить число, если известен его куб? Запишите формулу, с помощью которой можно это сделать, обозначив искомое число буквой k, а его куб – буквой c.

3) Какой единой обобщенной формулой можно записать две предыдущие зависимости? Докажите, что эта зависимость является функциональной.

79 1) Задайте функцию $y = \sqrt[3]{x}$ таблично:

x	-8	$-\frac{1}{8}$	-1	0	1	$\frac{1}{8}$	8
y							

2) Рассмотрите функцию $y = \sqrt[4]{x}$. Чем отличается область определения этой функции от области определения функции $y = \sqrt[3]{x}$?

3) Задайте функцию $y=\sqrt[4]{x}$ таблично:

x	0	$\frac{1}{16}$	1	$\frac{81}{16}$	16
y					

4) Постройте графики функций, используя полученные таблицы. Сравните их с графиками, изображенными на стр. 24, 25 учебника.

5) Какие общие свойства графиков вы можете отметить? В чем различие? Почему? Сопоставьте их со свойствами на стр. 25, 26 учебника. Какие из указанных в учебнике свойств вам удалось выявить самостоятельно?

80 Постройте графики функций:

а) $y=\sqrt[3]{x-3}$; б) $y=\sqrt[3]{x}-3$; в) $y=-\sqrt[5]{x+1}$.

81 Решите графически уравнение $\sqrt[3]{x}=2-x$.

82 Постройте график функции:

$$y=\begin{cases}-2-x, \text{ если } x<-1\\ \sqrt[3]{x}, \text{ если } x\geqslant -1\end{cases}$$

83 Постройте графики функций:

а) $y=2\cdot\sqrt[4]{x-2}+1$; б) $y=\left|\sqrt[5]{x}-1\right|$; в) $y=\sqrt[4]{|x|+1}-1$.

П **84** Сократите дроби:

а) $\dfrac{a+2\sqrt{a}+1}{a-1}$; в) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[3]{b}}$;

б) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}$; г) $\dfrac{\sqrt{b}-a^3}{a\sqrt{a}+\sqrt[4]{b}}$.

85 Упростите выражение: $\dfrac{1-c}{\sqrt{c}}x^2-2x+\sqrt{c}$, если $x=\dfrac{\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}}$.

86 Определите, на каких промежутках функция возрастает и убывает:

а) $y=2\sqrt[3]{x}-3\left|1-\sqrt[3]{x}\right|$; б) $y=\sqrt[3]{x}+2\left|1-\sqrt[3]{x}\right|$.

Д **87** Постройте графики функций:

а) $y=\sqrt[3]{x}+2$; б) $y=\sqrt[3]{x+2}$; в) $y=-\sqrt[3]{x+1}+1$.

88 Постройте графики функций:

а) $y=\left|\sqrt[4]{x}-1\right|$; б) $y=\sqrt[4]{|x|+1}$.

89 Упростите выражение: $\sqrt{\dfrac{x-2\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}-2\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}}}$.

С **90*** Докажите, что уравнение $\sqrt[2]{2-x^2}+\sqrt[3]{3-x^3}=0$ не имеет действительных решений.

5*. Иррациональность чисел $\sqrt[n]{a}$

Среди чисел существует такое совершенство и согласие, что нам надо размышлять дни и ночи над их удивительной закономерностью.

Симон Стевин (1548–1620),
бельгийский математик и инженер

Мы знаем, что числа $\sqrt{a}$, где a — натуральное число, не являющееся полным квадратом,— иррациональны. Доказательство было проведено для отдельных чисел, например, для числа $\sqrt{2}$ (нами было доказано то, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 2; существование действительного числа, квадрат которого равен 2, доказывается пока недоступными нам методами).

Докажем теперь в общем виде, что $\sqrt[n]{a}$, где a — натуральное число, не являющееся точной n-й степенью натурального числа, — иррациональное число. Докажем, точнее, что для такого a не существует рационального числа, n-я степень которого равна a.

Теорема 1. Пусть $a \in \boldsymbol{N}$, $n \in \boldsymbol{N}$. Тогда, если x — рациональное число такое, что $x^n = a$, то x — целое число.

(Иными словами, если a — натуральное число, то $\sqrt[n]{a}$ есть целое либо иррациональное число; поэтому если a не является n-й степенью натурального числа, то $\sqrt[n]{a}$ не может быть рациональным числом.)

Прежде чем доказывать эту теорему, выясним, какими вообще могут быть рациональные корни алгебраических уравнений с целыми коэффициентами.

Теорема 2. Пусть r — рациональный корень уравнения
$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$,
где $a_0, a_1, ..., a_n \in \boldsymbol{Z}$, $a_0 \neq 0$, причем $r = \dfrac{p}{q}$ — несократимая дробь. Тогда p — делитель a_n, q — делитель a_0.

Доказательство.

Так как $r = \dfrac{p}{q}$ — корень уравнения, то $a_0\left(\dfrac{p}{q}\right)^n + a_1\left(\dfrac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\cdot\dfrac{p}{q} + a_n = 0$, то есть $a_0p^n + a_1p^{n-1}q + ... + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0$.

Так как $a_nq^n = -a_0p^n - a_1p^{n-1}q - ... - a_{n-1}pq^{n-1}$, то $a_nq^n \vdots p$. Но $\dfrac{p}{q}$ — несократимая дробь, значит, в разложении p и q на простые множители нет общих множителей. Так как $a_nq^n \vdots p$, а q^n и p не имеют общих простых множителей, то все простые множители, входящие в разложение p, входят в разложение a_n с теми же или большими степенями, то есть $a_n \vdots p$.

Аналогично $a_0 \vdots q$ (это следует из равенства $a_0p^n = -a_1p^{n-1}q - ... - a_{n-1}pq^{n-1} - a_nq^n$). ■

Пример.

Найти все рациональные корни уравнения $3x^3 + x^2 + x - 2 = 0$.

Решение.

Пусть $r = \dfrac{p}{q}$ — несократимая дробь, являющаяся корнем данного уравнения. Тогда из теоремы 2 следует, что p — делитель числа -2, q — делитель числа 3, $p \in \boldsymbol{Z}$, $q \in \boldsymbol{N}$. Поэтому p может принимать значения 2; −2; 1; −1; q может принимать значения 3 и 1. Итого лишь 8 рациональных чисел могут быть корнями данного уравнения:

$$1;\ -1;\ 2;\ -2;\ \frac{1}{3};\ -\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ -\frac{2}{3}.$$

Непосредственная проверка показывает, что число $\dfrac{2}{3}$ удовлетворяет уравнению, остальные числа — нет. Уравнение $3x^3 + x^2 + x - 2 = 0$ имеет единственный рациональный корень $r = \dfrac{2}{3}$.

Вернемся к доказательству теоремы 1.

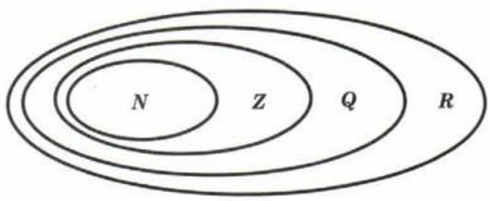
Доказательство.

Пусть несократимая дробь $r = \dfrac{p}{q}$ является корнем уравнения $x^n - a = 0$ (то есть рациональное число r является корнем n-й степени из a). По теореме 2, q — делитель коэффициента $a_0 = 1$, то есть r — целое число. ■

Итак, все числа вида $\sqrt[n]{a}$, где a натуральное и не является n-й степенью натурального числа,— иррациональны. Иррациональными являются числа $\sqrt{7}$, $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[5]{11}$ и т.д.

К **91** Рассмотрите диаграмму. Какие множества представлены на диаграмме? Покажите, где располагается множество иррациональных чисел?

Приведите пример квадратного корня, принадлежащего указанному множеству, и докажите его иррациональность.



92 Докажите иррациональность чисел:

а) $\sqrt[5]{11}$; б*) $\sqrt[3]{3} - \sqrt{2}$.

93 Число r — рациональное, α и β — иррациональные числа. Рациональными или иррациональными являются числа:

а) $\dfrac{\alpha}{3}$; б) β^2; в) $\alpha + r$; г) $\alpha \cdot \beta$; д) $\alpha + \beta$; е) $\dfrac{\alpha}{\beta}$?

Для всех ли случаев получилось дать однозначный ответ?

94 1) Чем похожи эти уравнения? Какой общий вид всех таких уравнений?

а) $x^2 - 5x + 6 = 0$; б) $x^4 - x^3 + 4x^2 - 3x - 1 = 0$; в) $3x^3 + x^2 + x - 2 = 0$.

2) Решите квадратное уравнение при помощи теоремы, обратной теореме Виета. Объясните, с каких чисел вы начинали подбор корней этого уравнения. При объяснении используйте понятие «делитель». Объясните, среди каких чисел нужно искать рациональные корни этого и других квадратных уравнений.

3) Попробуйте найти рациональные корни остальных уравнений. Как вы думаете, среди каких чисел следует искать рациональные корни второго уравнения? Проверьте свою гипотезу подстановкой найденных чисел.

4) Познакомьтесь с теоремой 2 и примените ее для поиска рациональных корней третьего уравнения. Сопоставьте ход своего решения с примером на стр. 29.

95 Найдите все рациональные корни уравнений:

а) $3x^3 + 8x^2 + 9x - 4 = 0$;

б) $2x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 15x + 10 = 0$.

П **96** Постройте графики функций:

а) $y = \sqrt[3]{x+1}$; б) $y = \sqrt[3]{|x|+1}$; в) $y = \left|\sqrt[3]{x+1}\right|$.

97 Постройте график уравнения:

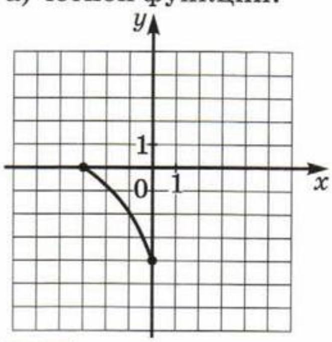
$|y^2 - 2x^2| = 2x^2$.

98 Исследуйте на четность и нечетность функции:

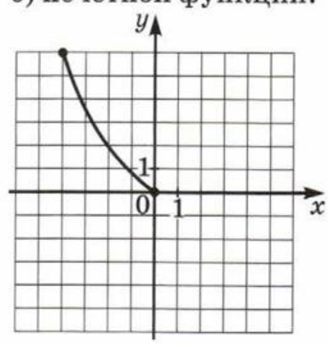
а) $y = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} \cdot x + 2$; б) $y = \dfrac{|x|+2}{x^4} + 4$; в) $y = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}} \cdot |x|$.

99 Достройте график

а) четной функции:



б) нечетной функции:



Д **100** Докажите иррациональность чисел:

а) $\sqrt[6]{36}$; б*) $\sqrt[3]{5} + \sqrt{3}$.

101 Найдите все рациональные корни уравнений:

а) $4x^3 + 5x^2 + 13x + 3 = 0$;

б) $12x^4 - 20x^3 - 11x^2 + 5x + 2 = 0$.

102 Постройте графики функций:

а) $y = \sqrt{x-1}$; б) $y = \sqrt{|x|-1}$; в) $y = \sqrt{|x-1|}$.

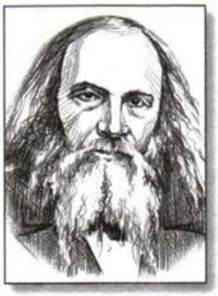
103 Исследуйте на четность и нечетность функции:

а) $y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$; б) $y = \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt[5]{x^3} \cdot x}$; в) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot x^2$.

С **104*** Целые числа m и n таковы, что сумма $\sqrt{n} + \sqrt[3]{m}$ целая. Верно ли, что оба слагаемых целые?

§ 2. Решение простейших иррациональных уравнений и неравенств

1. Иррациональные уравнения



...Справедливость требует не тому отдать наибольшую научную славу, кто первый высказал известную истину, а тому, кто умел убедить в ней других, показал ее достоверность и сделал ее применимою в науке.

Д. И. Менделеев (1834–1907),
русский ученый-энциклопедист: химик, физик, геолог, метеоролог, воздухоплаватель

Мы уже знаем, что, изучая новый вид уравнений, описывающих различные классы задач, возникающих на практике, мы расширяем свои возможности по их решению. В 8 классе мы встречались с уравнениями, содержащими неизвестную под знаком корня. Однако нам удавалось путем использования определения арифметического квадратного корня или удачной замены сводить их к известному нам виду – линейному или квадратному уравнениям.

Например:

1) $\sqrt{x} = 6 \Leftrightarrow x = 6^2 \Leftrightarrow x = 36$ (по определению арифметического квадратного корня).

2) $x + \sqrt{x} - 12 = 0$, пусть $\sqrt{x} = t$ $(t \geqslant 0)$, тогда $t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-4 \end{array}\right.$.

Отсюда, выбирая неотрицательное значение t, имеем $\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$.

Но эти приемы работают не всегда. В данном пункте мы подробно изучим способы решения уравнений с неизвестной под знаком корня, причем не только второй степени, но и выше. Сначала введем определение.

Определение 1. Уравнение, в котором алгебраическое выражение, содержащее неизвестную, находится под знаком корня, называется **иррациональным**.

Пример 1. Решить уравнения:

а) $\sqrt{5x-3x^2+2}=2$; б) $\sqrt[3]{x^2+4x-50}=3$.

Решение.

а) Ясно, что по определению арифметического квадратного корня уравнение $\sqrt{5x-3x^2+2}=2$ равносильно уравнению $5x - 3x^2 + 2 = 4$, то есть квадратному уравнению $3x^2-5x + 2 = 0$, которое имеет два корня: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{2}{3}$.

Ответ: $\left\{\frac{2}{3};1\right\}$.

б) Ясно, что по определению кубического корня уравнение $\sqrt[3]{x^2+4x-50}=3$ равносильно $x^2 + 4x - 50 = 27$, то есть $x^2 + 4x - 77 = 0$. Это квадратное уравнение имеет корни $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4+77}$, то есть $x_1 = 7$, $x_2 = -11$.

Ответ: $\{-11; 7\}$.

Замечание. Так как мы использовали при решении уравнения равносильное преобразование, то нет необходимости проводить проверку полученных корней подстановкой в уравнение. Конечно, для контроля правильности вычислений такая проверка иногда бывает полезной, но здесь необходимости в этом нет.

Отметим, что, используя определение корня n-й степени, мы фактически возводили обе части уравнения в n-ю степень, избавившись тем самым от знака корня. Используем эту идею для решения следующих уравнений.

Пример 2. Решить уравнения:

а) $\sqrt{x^2-16}=\sqrt{5x+8}$; б) $\sqrt[3]{-2x-1}=\sqrt[3]{x^2-36}$.

Решение.

а) Возведем обе части уравнения $\sqrt{x^2-16}=\sqrt{5x+8}$ в квадрат. Получим $\left(\sqrt{x^2-16}\right)^2=\left(\sqrt{5x+8}\right)^2$. Тогда по основному тождеству арифметического корня это уравнение сведется к квадратному $x^2-16=5x+8$. А его решать мы умеем.

Это уравнение $x^2-5x-24=0$ имеет два корня: $x_1=8$, $x_2=-3$.

Обратим внимание, что в уравнении, полученном нами с помощью возведения в квадрат, ограничения, связанные с понятием корня четной степени, уже не действуют. Значит, нужно сделать проверку. Подставим найденные корни в исходное уравнение.

При $x=8$ получим $\sqrt{8^2-16}=\sqrt{5\cdot 8+8} \Leftrightarrow \sqrt{48}=\sqrt{48}$ (истинно)

При $x=-3$ получим $\sqrt{(-3)^2-16}=\sqrt{5\cdot(-3)+8} \Leftrightarrow \sqrt{-9}=\sqrt{-9}$, полученное равенство не имеет смысла, так как противоречит определению арифметического квадратного корня.

Значит, $x=8$ – корень исходного уравнения, а $x=-3$ – нет (это – посторонний корень, появившийся при неравносильном преобразовании – возведении обеих частей уравнения в квадрат).

Замечание. Для отсеивания постороннего корня вместо подстановки можно было проверить, является ли хотя бы одно из выражений x^2-16 и $5x+8$ неотрицательным для полученных корней (тогда второе будет неотрицательным в силу их равенства). Так, при $x=8$ подкоренное выражение $x^2-16>0$, а при $x=-3$ выражение $x^2-16<0$.

Ответ: 8.

Итак, возведение в квадрат обеих частей уравнения $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ не является равносильным преобразованием. Конечно, $\sqrt{a}=\sqrt{b} \Rightarrow a=b$, но обратное утверждение верно лишь в случае $a=b\geqslant 0$. Поэтому при решении уравнений таким способом необходимо делать проверку на наличие посторонних корней.

б) Возведем обе части уравнения $\sqrt[3]{-2x-1}=\sqrt[3]{x^2-36}$ в третью степень.

$\sqrt[3]{-2x-1}=\sqrt[3]{x^2-36} \Leftrightarrow -2x-1=x^2-36$, так как $\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{b} \Leftrightarrow a=b$.

Решая квадратное уравнение $x^2+2x-35=0$, получим: $x_1=5$, $x_2=-7$. Так как преобразование, использованное нами, равносильное, то проверку делать не нужно.

Ответ: $\{-7; 5\}$.

Можем записать следующие **схемы решения иррациональных уравнений:**

$\sqrt{f(x)}=a\ \ (a\geqslant 0) \Leftrightarrow f(x)=a^2$; $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x)\geqslant 0$;

$\sqrt[3]{f(x)}=a \Leftrightarrow f(x)=a^3$; $\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x)$.

Пример 3. Решить уравнения:

а) $x+17=10\sqrt{x-4}$; б) $x=32+2\sqrt{x+3}$; в) $x+1=\sqrt[3]{x^3+2x^2+5x+100}$.

Решение.

а) 1-й способ. После возведения обеих частей уравнения в квадрат получим уравнение $(x+17)^2 = 100(x-4)$. Решим полученное квадратное уравнение $x^2 + 34x + 289 = 100x - 400 \iff x^2 - 66x + 689 = 0 \iff x_1 = 53,\ x_2 = 13$.

Так как использованное нами преобразование $a=\sqrt{b} \Rightarrow a^2=b$ равносильно, только если $a \geqslant 0$, нужно сделать проверку на наличие посторонних корней.

При $x = 53$ и $x = 13$ выражение $x + 17 > 0$, и возведение в квадрат обеих частей уравнения не приведет к появлению посторонних корней (проверять неотрицательность выражения под знаком корня не имеет смысла, так как из выполнения равенства $b = a^2$ автоматически следует, что $b \geqslant 0$).

Заметим, что проверку можно было сделать и непосредственной подстановкой корней в исходное уравнение.

При решении подобных уравнений можно «избавиться» от знака радикала и по-другому – хорошо знакомым нам методом введения нового неизвестного.

2-й способ. Сделаем замену $t=\sqrt{x-4}$ (обращаем внимание на то, что $t \geqslant 0$). Тогда $t^2 = x - 4$ и $x = t^2 + 4$. Уравнение примет вид $t^2 + 4 + 17 = 10t$, т.е. $t^2 - 10t + 21 = 0$. Это квадратное уравнение имеет два корня: $t_1 = 7$, $t_2 = 3$. Проверим условие $t \geqslant 0$ – оба корня неотрицательны. Перейдем к «старому» неизвестному: $x_1 = 7^2 + 4 = 53$, $x_2 = 3^2 + 4 = 13$.

Ответ: $\{13, 53\}$.

б) 1-й способ. Возведем обе части уравнения в квадрат. Учитывая, что это преобразование будет равносильным только при неотрицательности левой части уравнения, можем записать следующую равносильность:

$$x-32=2\sqrt{x+3} \iff \begin{cases}(x-32)^2=4(x+3)\\ x \geqslant 32\end{cases}.$$

Квадратное уравнение, входящее в систему, имеет вид $x^2 - 64x + 1024 = 4x + 12$, то есть $x^2 - 68x + 1012 = 0$. Оно имеет корни $x_{1,2}=34\pm\sqrt{1156-1012}=34\pm12$, то есть $x_1 = 46$, $x_2 = 22$. Но только первый из этих корней удовлетворяет условию $x \geqslant 32$, поэтому только он является корнем исходного уравнения.

Заметим, что это уравнение тоже можно было решить введением нового неизвестного.

2-й способ. Сделаем замену $\sqrt{x+3}=t$ $(t \geqslant 0)$; тогда $x = t^2 - 3$. Уравнение примет вид $t^2 - 3 = 32 + 2t$, то есть $t^2 - 2t - 35 = 0$, откуда $t_1 = 7$, $t_2 = -5$. Учитывая, что $t \geqslant 0$, подходит только положительный корень $t = 7$.

Перейдем к «старому» неизвестному: $x = 7^2 - 3 = 46$.

Ответ: 46.

в) Так как $a=\sqrt[3]{b} \Leftrightarrow a^3=b$, то исходное уравнение равносильно $(x+1)^3 = x^3 + 2x^2 + 5x + 100$ (возведение обеих частей уравнения в куб является равносильным преобразованием). Уравнение преобразуется к виду

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + 2x^2 + 5x + 100 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 99 = 0$.

Это уравнение имеет два корня: $x_1 = -9$, $x_2 = 11$.

Ответ: $\{-9, 11\}$.

Можем записать следующие **схемы решений иррациональных уравнений:**

$$\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=(g(x))^2\\g(x)\geqslant 0\end{cases};\qquad \sqrt[3]{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow f(x)=(g(x))^3.$$

Обратим внимание на то, что при решении уравнения вида $\sqrt{f(x)}=g(x)$ мы не находили область допустимых значений (ОДЗ) уравнения. ОДЗ уравнения $\sqrt{f(x)}=g(x)$ (если функции $f(x)$ и $g(x)$ всюду определены) является множество решений неравенства $f(x)\geqslant 0$. Но после возведения в квадрат получаем уравнение $f(x)=(g(x))^2$, для решений которого неравенство $f(x)\geqslant 0$ выполняется автоматически. А вот условие $g(x)\geqslant 0$ проверять нужно. Заметим, что вместо этой проверки можно подставить корни в исходное уравнение, но эта процедура может быть очень громоздкой (например, если полученные корни иррациональны).

Полученные нами схемы для квадратного корня сохраняются для корней любой четной степени, а схема кубического корня – для корней любой нечетной степени.

Итак, **решить иррациональное уравнение, содержащее корни n-й степени, можно** следующими способами:

1 способ. Для уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)}=a$ использовать определение корня n-й степени.

2 способ. Для уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)}=g(x)$ и $\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{g(x)}$ возвести обе части уравнения в n-ю степень, добиваясь перехода к уравнению без знака корня. При четном n необходимо учитывать возможность появления посторонних корней.

3 способ. Провести замену неизвестного $\sqrt{f(x)}=t$, учитывая в ходе дальнейшего решения, что $t\geqslant 0$.

* * *

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{x-3}+x=7$.

Решение.

Решение этого уравнения последовательным возведением в квадрат сведется к уравнению четвертой степени с последующей проверкой, поэтому проще поступить иначе. Заметим, что уравнение имеет корень $x=4$.

Покажем, что других корней уравнение не имеет. Левая часть этого уравнения определена при $x\geqslant 3$, и все три слагаемых в левой части являются строго возрастающими функциями на $[3;+\infty)$. Поэтому левая часть уравнения $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x-3}+x$ является строго возрастающей функцией на $[3;+\infty)$. Но $f(4)=7$, значит, при $x>4$ выполняется неравенство $f(x)>f(4)=7$, а при $3\leqslant x<4$ выполняется неравенство $f(x)<f(4)=7$. Значит $f(x)=7\Leftrightarrow x=4$, то есть единственным решением уравнения является число $x=4$.

Ответ: 4.

Это решение основано на том факте, что строго возрастающая функция принимает каждое свое значение ровно 1 раз. Поэтому если удастся угадать одно решение такого уравнения, то оно будет единственным.

Отметим, что такой метод применяется не только для иррациональных уравнений, но и для уравнений более широких классов.

К **105** Какие из утверждений являются неверными?

а) $\sqrt{a}=\sqrt{b}\Rightarrow a=b$; б) $a=b\Rightarrow\sqrt{a}=\sqrt{b}$; в) $\sqrt{a}=\sqrt{b}\Leftrightarrow a=b$;

г) $\sqrt{a}=b\Leftrightarrow\begin{cases}a=b^2\\ b\geqslant 0\end{cases}$; д) $\sqrt{a}=\sqrt{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\ a\geqslant 0\end{cases}$; е) $a=\sqrt[3]{b}\Leftrightarrow a^3=b$.

106 1) Решите уравнения $\sqrt{x}=2$ и $\sqrt[3]{x}=-2$, используя известное понятие корня n-й степени.

2) По аналогии решите уравнение: $\sqrt[3]{x^2+7}=2$.

3) Как можно по-другому описать выполненное в ходе решения преобразование:

$\sqrt{x}=2\Leftrightarrow x=2^2$,

$\sqrt[3]{x}=-2\Leftrightarrow x=(-2)^3$,

$\sqrt[3]{x^2+7}=2\Leftrightarrow x^2+7=2^3$,

используя понятие «возведение в степень»? Поясните, почему это преобразование является равносильным.

107 1) С помощью какого преобразования можно свести уравнение $\sqrt{x^2+x}=\sqrt{x+4}$ к уравнению, способ решения которого уже известен? Решите уравнение и сделайте проверку. Подумайте, будет ли использованное вами преобразование равносильным.

2) С помощью какого преобразования можно свести уравнение $\sqrt{12-4x}=x$ к уравнению, способ решения которого уже известен? Решите уравнение и сделайте проверку. Подумайте, будет ли использованное вами преобразование равносильным.

3) Можно ли применять использованные вами способы решения для всех иррациональных уравнений такого вида? Составьте правило решения таких уравнений и сопоставьте его с правилом на стр. 33.

108 Решите уравнения:

а) $\sqrt{2x^2-3x+10}=3$; б) $\sqrt{x^2-2x+5}=-2$; в) $\sqrt[3]{x^2-11}=-2$.

109 Решите уравнения:

а) $\sqrt{x^2-3x}=\sqrt{2x-6}$; б) $\sqrt[3]{x^2+x}=\sqrt[3]{-2x-2}$.

110 Решите уравнения:

а) $2x=1+\sqrt{x^2-5x+5}$; б) $\sqrt[3]{x^2-5x-14-x^3}+x=0$.

111 Решите уравнение: $\sqrt{2x}+\sqrt{x-1}=9-3x$.

П **112** Дана последовательность $a_n=9n-5n^2+2$. Сколько в этой последовательности положительных членов? Найдите наибольший член последовательности.

113 Последовательность (a_n) задана формулой n-го члена: $a_n=\dfrac{4n-1}{3n+2}$, $n\in\boldsymbol{N}$. Докажите, что $a_n<1\dfrac{1}{3}$ при всех $n\in\boldsymbol{N}$ и последовательность (a_n) является возрастающей.

114 Докажите иррациональность чисел:

а) $\sqrt[4]{4}$; б*) $\sqrt[5]{3}-\sqrt{3}$.

115 Найдите все рациональные корни уравнения $x^3-8x^2+9x-2=0$.

D **116** Решите уравнения:

а) $\sqrt{x^2-7}=-3$; б) $\sqrt{x^2-6x-4}=1$; в) $\sqrt[3]{x^2+2x-7}=2$.

117 Решите уравнения:

а) $\sqrt{x^2-6x+7}=\sqrt{x-3}$; б) $\sqrt[3]{x^2-5}=\sqrt[3]{1-x}$.

118 Решите уравнения:

а) $x+1=\sqrt{x+13}$; б) $\sqrt[3]{x^3+4x^2+6x-3}=x+1$.

119 Решите уравнение: $\sqrt{x^2+5}+\sqrt{2x}+x=7$.

120 Дана последовательность $a_n=3n^2-5n-12$. Сколько в этой последовательности отрицательных членов? Найдите наименьший член последовательности.

121 Последовательность (a_n) задана формулой n-го члена: $a_n=\dfrac{3n+1}{4n-3}$, $n\in N$. Докажите, что $a_n>0{,}75$ при всех $n\in N$ и последовательность (a_n) является убывающей.

122 Докажите иррациональность чисел:

а) $\sqrt[5]{5}$; б*) $\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{2}$.

123 Найдите все рациональные корни уравнения $-2x^3-3x^2+5x+6=0$.

C **124*** Решите неравенство: $[x]\cdot\{x\}<x-1$.

2.* Иррациональные неравенства

...Человека, умеющего наблюдать и анализировать, обмануть просто невозможно. Его выводы будут безошибочны, как теоремы Евклида.

А. Конан Дойл (1859–1930),
шотландский и английский писатель

В предыдущем пункте мы научились решать простейшие иррациональные уравнения. Естественно помимо иррациональных уравнений рассмотреть и аналогичные неравенства.

***Определение* 1.** Неравенство, в котором алгебраическое выражение, содержащее неизвестную, находится под знаком корня, называется **иррациональным**.

Так же как и при решении иррациональных уравнений, при решении иррациональных неравенств мы будем использовать возведение обеих частей неравенства в нужную нам степень. При этом при возведении обеих частей неравенства в четную степень будем следить за знаками левой и правой частей, чтобы отслеживать равносильность выполненных нами преобразований. Начнем с самых простых примеров.

Пример 1. Решить неравенства:

а) $\sqrt{3x+5} \geqslant 2$; б) $\sqrt{4x-1} < 2$;

в) $\sqrt[3]{5x+1} \geqslant 3$; г) $\sqrt[3]{2x-1} < -5$.

Решение.

а) Если b – положительное число, то $\sqrt{a} \geqslant b \Leftrightarrow a \geqslant b^2$ (a обязано быть неотрицательным, но для всех a, удовлетворяющих неравенству $a \geqslant b^2$, автоматически выполняется условие $a \geqslant 0$). Поэтому $\sqrt{3x+5} \geqslant 2 \;\Leftrightarrow\; 3x+5 \geqslant 4 \;\Leftrightarrow\; 3x \geqslant -1 \;\Leftrightarrow\; x \geqslant -\dfrac{1}{3}$.

Ответ: $x \in \left[-\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$.

б) Если b – положительное число, то $\sqrt{a} < b \Rightarrow a < b^2$. Равносильности здесь уже нет, так из выполнения неравенства $a < b^2$ вовсе не следует, что $a \geqslant 0$, и a может быть отрицательным. А вот если $a \geqslant 0$, то $\sqrt{a} < b \Leftrightarrow a < b^2$. Поэтому в общем случае

$\sqrt{a} < b \Leftrightarrow \begin{cases} a < b^2 \\ a \geqslant 0 \end{cases}$, то есть $\sqrt{a} < b \Leftrightarrow 0 \leqslant a < b^2$.

Итак, $\sqrt{4x-1} < 2 \Leftrightarrow 0 \leqslant 4x-1 < 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} \leqslant x < \dfrac{5}{4}$.

Ответ: $x \in \left[\dfrac{1}{4}; \dfrac{5}{4}\right)$.

в) $\sqrt[3]{a} \geqslant b \Leftrightarrow a \geqslant b^3$ (функция $f(x) = x^3$ строго возрастает на всей числовой прямой), поэтому $\sqrt[3]{5x+1} \geqslant 3 \Leftrightarrow 5x+1 \geqslant 27 \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{26}{5}$.

Ответ: $x \in \left[\dfrac{26}{5}; +\infty\right)$.

г) $\sqrt[3]{a} < b \Leftrightarrow a < b^3$; поэтому $\sqrt[3]{2x-1} < -5 \;\Leftrightarrow\; 2x-1 < -125 \;\Leftrightarrow\; x < -62$.

Ответ: $x \in (-\infty; -62)$.

Как мы знаем, возведение в квадрат является неравносильным преобразованием в случае, когда одна из частей неравенства отрицательна. Рассмотрим примеры, показывающие, как решаются иррациональные неравенства в этом случае.

Пример 2. Решить неравенства:

а) $\sqrt{4x+3} \leqslant -2$; б) $\sqrt{5x-4} > -6$.

Решение.

а) Если b – отрицательное число, то неравенство $\sqrt{a} \leqslant b$ невозможно, так как a обязано быть неотрицательным, и для всех $a \geqslant 0$ выполнено $\sqrt{a} \geqslant 0$.

Ответ: $x \in \varnothing$.

б) Если b – отрицательное число, то $\sqrt{a} > b \Leftrightarrow a \geqslant 0$ (a обязано быть неотрицательным, и тогда $\sqrt{a} \geqslant 0 > b$). Поэтому $5x-4 \geqslant 0$, $x \geqslant \dfrac{4}{5}$.

Ответ: $x \in \left[\dfrac{4}{5}; +\infty\right)$.

Рассмотрим неравенства, где под знаком корня стоит квадратный трехчлен.

Пример 3. Решить неравенства:

а) $\sqrt{3x^2-10x+7} \geqslant 2$; б) $\sqrt{x^2-35x} < 6$; в) $\sqrt[3]{x^2-x} \leqslant 4$; г) $\sqrt[3]{x^2+9x} > -2$.

Решение.

а) $\sqrt{3x^2-10x+7} \geqslant 2 \Leftrightarrow 3x^2-10x+7 \geqslant 4 \Leftrightarrow 3x^2-10x+3 \geqslant 0$.

Квадратный трехчлен имеет корни $x_1 = 3$, $x_2 = \dfrac{1}{3}$.

Ответ: $x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right] \cup [3; +\infty)$.

б) $\sqrt{x^2-35x} < 6 \Leftrightarrow 0 \leqslant x^2-35x < 36 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-35x \geqslant 0 \\ x^2-35x < 36 \end{cases}$.

Квадратный трехчлен $x^2 - 35x$ имеет корни $x_1 = 0$, $x_2 = 35$, поэтому неравенство $x^2 - 35x \geqslant 0$ имеет множество решений $(-\infty; 0) \cup [35; +\infty)$. Далее, $x^2 - 35x < 36 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 - 35x - 36 < 0$. Квадратный трехчлен $x^2 - 35x - 36$ имеет корни $x_1 = -1$, $x_2 = 36$, поэтому неравенство $x^2 - 35x - 36 < 0$ имеет множество решений $x \in (-1; 36)$. Пересекая полученные множества решений, получаем ответ: $x \in (-1; 0] \cup [35; 36)$.

Ответ: $x \in (-1; 0] \cup [35; 36)$.

в) $\sqrt[3]{x^2-x} \leqslant 4 \Leftrightarrow x^2-x \leqslant 64 \Leftrightarrow x^2-x-64 \leqslant 0$. Квадратный трехчлен x^2-x-64 имеет корни $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{257}}{2}$.

Ответ: $x \in \left[\dfrac{1-\sqrt{257}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{257}}{2}\right]$.

г) $\sqrt[3]{x^2+9x} > -2 \Leftrightarrow x^2+9x > -8 \Leftrightarrow x^2+9x+8 > 0$. Квадратный трехчлен имеет корни $x_1 = -1$, $x_2 = -8$.

Ответ: $x \in (-\infty; -8) \cup (-1; +\infty)$.

Итак, мы можем использовать следующие **схемы решений иррациональных неравенств:**

$\sqrt{f(x)} > a \ (a \geqslant 0) \Leftrightarrow f(x) > a^2$;

$\sqrt{f(x)} \geqslant a \ (a \geqslant 0) \Leftrightarrow f(x) \geqslant a^2$;

$\sqrt{f(x)} < a \ (a > 0) \Leftrightarrow 0 \leqslant f(x) < a^2$;

$\sqrt{f(x)} \leqslant a \ (a \geqslant 0) \Leftrightarrow 0 \leqslant f(x) \leqslant a^2$;

$\sqrt{f(x)} > a \ (a < 0) \Leftrightarrow f(x) \geqslant 0$;

$\sqrt{f(x)} \geqslant a \ (a < 0) \Leftrightarrow f(x) \geqslant 0$;

$\sqrt{f(x)} \leqslant a \ (a < 0) \Leftrightarrow x \in \varnothing$;

$\sqrt{f(x)} < a \ (a \leqslant 0) \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

$\sqrt[3]{f(x)} > a \Leftrightarrow f(x) > a^3$;

$\sqrt[3]{f(x)} \geqslant a \Leftrightarrow f(x) \geqslant a^3$;

$\sqrt[3]{f(x)} < a \Leftrightarrow f(x) < a^3$;

$\sqrt[3]{f(x)} \leqslant a \Leftrightarrow f(x) \leqslant a^3$.

* * *

Мы познакомились с простейшими иррациональными неравенствами. Рассмотрим примеры решения более сложных неравенств.

Пример 4. Решить неравенства:

а) $(3x^2-16x+21)\sqrt{2x+5} \leqslant 0$; б) $(2x+3)\sqrt{6+x-x^2} \geqslant 0$; в) $\sqrt{4x+7} < \sqrt{x^2-2x}$.

Решение.

а) Заметим, что $\sqrt{2x+5} \geqslant 0$ для всех значений x из области допустимых значений переменной, т.е. для всех $x \geqslant -\frac{5}{2}$. Но если $x > -\frac{5}{2}$, то $\sqrt{2x+5} > 0$, и неравенство равносильно $3x^2 - 16x + 21 \leqslant 0$. Квадратный трехчлен имеет корни $x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 3 \cdot 21}}{3}$, т.е. $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{7}{3}$; множество решений неравенства $x \in \left[\frac{7}{3}; 3\right]$. Все эти числа удовлетворяют условию $x > -\frac{5}{2}$, поэтому являются решениями исходного неравенства. Если $x = -\frac{5}{2}$, то левая часть неравенства равна 0, и неравенства выполняются.

Ответ: $x \in \left\{-\frac{5}{2}\right\} \cup \left[\frac{7}{3}; 3\right]$.

б) Заметим, что $\sqrt{6 + x - x^2} \geqslant 0$ при всех x из области допустимых значений переменной, т.е. для всех решений неравенства $6 + x - x^2 \geqslant 0$, т.е. для всех $x \in [-2; 3]$. Но при $x \in (-2; 3)$ выполняется неравенство $6 + x - x^2 > 0$, и неравенство равносильно $2x + 3 \geqslant 0$, т.е. $x \geqslant -\frac{3}{2}$. Пересекая с интервалом $(-2; 3)$, получаем $x \in \left[-\frac{3}{2}; 3\right)$. Все эти числа являются решениями исходного неравенства. А если $x = -2$ или $x = 3$, то левая часть неравенства равна 0, и неравенство выполняется.

Ответ: $x \in \{-2\} \cup \left[-\frac{3}{2}; 3\right]$.

в) $\sqrt{4x+7} < \sqrt{x^2 - 2x} \Leftrightarrow 0 \leqslant 4x + 7 < x^2 - 2x$ (попробуйте объяснить, почему это так).

Далее, $0 \leqslant 4x + 7 \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{7}{4}$; $4x + 7 < x^2 - 2x \Leftrightarrow x^2 - 6x - 7 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (7; +\infty)$.

Пересекая полученные множества решений, получим ответ: $x \in \left[-\frac{7}{4}; -1\right) \cup (7; +\infty)$.

Ответ: $x \in \left[-\frac{7}{4}; -1\right) \cup (7; +\infty)$.

Пример 5. Решить неравенства:

а) $\sqrt{x+1} > x - 1$; б) $\sqrt{5 - x^2} \geqslant x + 1$; в) $\sqrt{x+5} < x - 1$; г) $\sqrt{x^2 - 5} \leqslant 2x - 4$.

Решение.

а) <u>1-й способ.</u> В правой части неравенства стоит функция, которая может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Поэтому возведение в квадрат будет неэквивалентным преобразованием. Необходимо рассмотреть два случая: $x - 1 < 0$ и $x - 1 \geqslant 0$.

1) $x - 1 < 0$. Тогда левая часть неравенства неотрицательна при всех таких x из ОДЗ: $x + 1 \geqslant 0$, а правая – отрицательна, и неравенство выполнено. Получаем систему $\begin{cases} x - 1 < 0 \\ x + 1 \geqslant 0 \end{cases}$, решение которой $-1 \leqslant x < 1$.

2) $x - 1 \geqslant 0$. Тогда обе части неравенства неотрицательны, и его можно возвести в квадрат: $x + 1 > (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x < 0$. При этом подкоренное выражение $x + 1$ автоматически будет неотрицательным. Получаем систему $\begin{cases} x - 1 \geqslant 0 \\ x^2 - 3x < 0 \end{cases}$, решение которой $1 \leqslant x < 3$.

Объединяя найденные множества решений, получаем ответ: $x \in [-1; 3)$.

<u>2-й способ.</u> Сделаем замену $t=\sqrt{x+1}$ ($t \geqslant 0$). Тогда $x=t^2-1$. Неравенство примет вид $t>t^2-2$, т.е. $t^2-t-2<0$. Это квадратное неравенство имеет решение $-1<t<2$. Учитывая $t \geqslant 0$, получаем $0 \leqslant t<2$. Значит, $0 \leqslant \sqrt{x+1}<2$. Получаем неравенство $0 \leqslant x+1<4$, решение которого $-1 \leqslant x<3$.

Ответ: $x \in [-1; 3)$.

б) Аналогично п. а) примера нужно рассмотреть два случая: $x+1<0$ и $x+1 \geqslant 0$.

1) $x+1<0$. Тогда левая часть неравенства неотрицательна при всех таких x из ОДЗ: $5-x^2 \geqslant 0$. Получаем систему $\begin{cases} x+1<0 \\ 5-x^2 \geqslant 0 \end{cases}$, решение которой $-\sqrt{5} \leqslant x<-1$.

2) $x+1 \geqslant 0$. Тогда обе части неравенства неотрицательны, и его можно возвести в квадрат: $5-x^2 \geqslant (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2+x-2 \leqslant 0$. Получаем систему $\begin{cases} x+1 \geqslant 0 \\ x^2+x-2 \leqslant 0 \end{cases}$, решение которой $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Объединяя найденные множества решений, получаем ответ: $x \in [-\sqrt{5}; 1]$.

Ответ: $x \in [-\sqrt{5}; 1]$.

в) <u>1-й способ.</u> Аналогично п. а) примера нужно рассмотреть два случая: $x-1<0$ и $x-1 \geqslant 0$.

1) $x-1<0$. Тогда при всех таких x из ОДЗ левая часть неравенства неотрицательна, а правая отрицательна. Поэтому в этом случае решений нет.

2) $x-1 \geqslant 0$. Тогда обе части неравенства неотрицательны, и его можно возвести в квадрат: $x+5<(x-1)^2 \Leftrightarrow x^2-3x-4>0$. При этом необходимо проверить, что подкоренное выражение $x+5$ будет неотрицательным (т.е. $x+5 \geqslant 0$). Получаем систему $\begin{cases} x-1 \geqslant 0 \\ x+5 \geqslant 0 \\ x^2-3x-4>0 \end{cases}$, решение которой $x>4$.

<u>2-й способ.</u> Сделаем замену $t=\sqrt{x+5}$ ($t \geqslant 0$). Тогда $x=t^2-5$. Неравенство примет вид: $t<t^2-6$, $0<t^2-t-6$, и, с учетом $t \geqslant 0$, получаем: $3<t$, $3<\sqrt{x+5}$, $9<x+5$.

Ответ: $x \in (4; +\infty)$.

г) Аналогично п. а) примера нужно рассмотреть два случая: $2x-4<0$ и $2x-4 \geqslant 0$.

1) $2x-4<0$. Тогда при всех таких x из ОДЗ левая часть неравенства неотрицательна, а правая отрицательна. Поэтому в этом случае решений нет.

2) $2x-4 \geqslant 0$. Тогда обе части неравенства неотрицательны, и его можно возвести в квадрат: $x^2-5 \leqslant (2x-4)^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3x^2-16x+21 \geqslant 0$. При этом необходимо проверить, что подкоренное выражение x^2-5 будет неотрицательным (т.е. $x^2-5 \geqslant 0$). Получаем систему $\begin{cases} 2x-4 \geqslant 0 \\ x^2-5 \geqslant 0 \\ 3x^2-16x+21 \geqslant 0 \end{cases}$, решение которой $\left[\sqrt{5}; \frac{7}{3}\right] \cup [3; +\infty)$.

Ответ: $x \in \left[\sqrt{5}; \frac{7}{3}\right] \cup [3; +\infty)$.

Мы можем использовать следующие **схемы решения иррациональных неравенств** такого вида:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \end{array}\right. \qquad \sqrt{f(x)} \geqslant g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) \geqslant g^2(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \geqslant 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases} \qquad \sqrt{f(x)} \leqslant g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) \geqslant 0 \\ f(x) \leqslant g^2(x) \end{cases}$$

К **125** Какие из утверждений являются неверными?

а) $b^2 \geqslant 0$;

б) $\sqrt{a} \geqslant b \Leftrightarrow a \geqslant b^2$;

в) $\sqrt{a} < b \Leftrightarrow a < b^2$;

г) $\sqrt[3]{a} < b \Leftrightarrow a < b^3$;

д) $\sqrt{a} < b \Leftrightarrow \begin{cases} a < b^2 \\ a \geqslant 0 \end{cases}$;

е) $\sqrt[3]{a} > b \Leftrightarrow a > b^3$.

Обоснуйте свой ответ, приводя контрпример.

126 1) С помощью какого преобразования можно привести неравенство $\sqrt{3x+5} \geqslant 2$ к неравенству, способ решения которого известен? Подумайте, будет ли использованное вами преобразование равносильным. Решите неравенство и сопоставьте ход решения с решением, изложенным на стр. 37.

2) С помощью какого преобразования можно привести неравенство $\sqrt{4x-1} < 2$ к неравенству, способ решения которого известен? Подумайте, будет ли использованное вами преобразование равносильным. Решите неравенство и сопоставьте ход решения с решением, изложенным на стр. 37.

3) Можно ли применять использованные вами способы решения для всех иррациональных неравенств такого вида? Познакомьтесь со способом решения аналогичных неравенств со знаком корня 3-й степени, разобрав решение остальных неравенств из примера 1.

127 Решите неравенства:

а) $\sqrt{7x+1} \geqslant 2$;

б) $\sqrt{2x-1} \leqslant -1$;

в) $\sqrt{2x+1} < 2$;

г) $\sqrt[3]{x-1} \leqslant -2$;

д) $\sqrt[3]{3x-2} > 3$.

128 Решите неравенства:

а) $\sqrt{5x+7-2x^2} > 2$;

б) $\sqrt{x^2-4} \leqslant 3$;

в) $\sqrt[3]{x^2-2x+1} > 2$.

129 Решите неравенства:

а) $(x^2-x-6)\sqrt{x+1} \geqslant 0$;

б) $(x-2)\sqrt{x^2-6x+5} \geqslant 0$;

в) $\sqrt{x+6} < \sqrt{x^2+2x}$.

130 Решите неравенства:

а) $\sqrt{2x+1} > 7-x$; б) $\sqrt{x^2-8} \leqslant 4-x$.

П **131** Дополните таблицу чисел-гигантов, используя понятие степени

1000 единиц – 1 тысяча	10^3
1000 тысяч – 1 миллион	
1000 миллионов – 1 миллиард	
1000 миллиардов – 1 триллион	
1000 триллионов – 1 квадриллион	
1000 квадриллионов – 1 квинтиллион	
1000 квинтиллионов – 1секстиллион	

Сколько цифр в числе 1 триллион, 1 секстиллион?

Для записи числа один октиллион можно использовать следующие формы: 1000000000000000000000000000 или 10^{27}. Какая запись, на ваш взгляд, более удобна для вычислений?

132 Напишите первые пять членов последовательности, общий член которой выражается формулой:

а) $a_n = \dfrac{(-2)^n}{n^3}$; б) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$.

133 Докажите, что последовательность (a_n) с общим членом $a_n = \dfrac{2}{n^2+1}$ убывает при всех $n \in N$.

134 Решите уравнения:

а) $\sqrt{7x-2x^2-1} = 2$; в) $\sqrt[3]{x^2+15x+25} = -1$,

б) $\sqrt{x^2-64} = \sqrt{8-6x}$; г) $\sqrt[3]{26-10x} = \sqrt[3]{10-x^2}$.

135 Решите уравнения:

а) $x-5+\sqrt{x-2} = 3$; б) $\sqrt{2x+5} - \sqrt{2x} = 1$; в) $x-1 = \sqrt[3]{x^3-5x^2+4x+2}$.

Д **136** Решите неравенства:

а) $\sqrt{3x+2} \geqslant 1$; б) $\sqrt{3x+1} < 2$; в) $\sqrt[3]{2x+1} \leqslant 3$; г) $\sqrt[3]{7x+2} > 2$; д) $\sqrt{x+2} > -3$.

137 Решите неравенства:

а) $\sqrt{x^2-2x+6} \geqslant 3$; б) $\sqrt{2-x^2-x} < \sqrt{2}$; в) $\sqrt[3]{x^2-5x+7} \leqslant 1$.

138 Решите неравенства:

а) $(x^2-5)\sqrt{x+3} \geqslant 0$; б) $(2x-5)\sqrt{x^2-5x+6} \leqslant 0$; в) $\sqrt{x^2-1} < \sqrt{x+5}$.

139 Решите неравенства:

а) $\sqrt{5-x} \geqslant x+1$; б) $\sqrt{5-x^2} < 3-x$.

140 Напишите первые шесть членов последовательности (a_n), если $a_1 = 1$, $a_2 = -1$ и для всех $n \in N$ выполняется равенство $a_{n+2} = (a_{n+1})^2 + a_n - 1$.

141 Докажите, что последовательность (a_n) с общим членом $a_n = n^2 - n$ возрастает при всех $n \in N$.

142 Решите уравнения:

а) $\sqrt{5x-3x^2+7}=3$; в) $\sqrt[3]{x^2+11x+1}=-3$;

б) $\sqrt{40-x^2}=\sqrt{4-9x}$; г) $\sqrt[3]{6+2x^2}=\sqrt[3]{5+4x}$.

143 Решите уравнения:

а) $5-x+\sqrt{x-2}=3$; б) $2\sqrt{x-3}+\sqrt{x+1}=2$; в) $x+2=\sqrt[3]{x^3+7x^2-2x+41}$.

C **144*** Для последовательности Фибоначчи ($F_1=F_2=1$, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$) найдите значение выражения: $F_{2012}^2-F_{2011}\cdot F_{2013}$.

Экспресс-тест № 6

Примерное время выполнения – 60 минут

Часть А

№ 1			
1	2	3	4

№ 1. Установите соответствие между данными выражениями:

1) $-\sqrt[10]{(-243)^2}$; 2) $\sqrt[8]{(-3)^8}$; 3) $\sqrt[28]{t^7}$; 4) $\sqrt{\sqrt{t}}$

и выражениями, являющимися их упрощениями.

А) 3; Б) $\sqrt[4]{|t|}$; В) -3; Г) $\sqrt[4]{t}$.

№ 2

№ 2. Найдите наименьшее целое число, не меньшее числа $\sqrt[4]{255}$.

А) 16; Б) 3; В) 4; Г) 5.

№ 3			
1	2	3	4

№ 3. Представьте каждое из выражений в виде одного корня некоторой степени:

1) $\sqrt[9]{12}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[6]{18}}$; 2) $\dfrac{\sqrt[9]{16}}{\sqrt{2}}$; 3) $\dfrac{\sqrt[6]{4}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt[3]{10}}$; 4) $\dfrac{\sqrt[6]{21}}{\sqrt[9]{7}\cdot\sqrt[3]{3}}$

и установите соответствие с предложенными ответами:

А) $\sqrt[18]{125}$; Б) $\sqrt[18]{\dfrac{7}{27}}$; В) $\sqrt[18]{0{,}5}$; Г) $\sqrt[18]{486}$.

№ 4

№ 4. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{5}{\sqrt[5]{-5}}$.

А) $\sqrt[5]{625}$; Б) $-\sqrt[5]{625}$; В) 1; Г) -1.

№ 5

№ 5. Решите уравнение: $\sqrt{x^2-36}=\sqrt{2x-1}$.

А) -5; 7; Б) 0,5; В) 6; Г) 7.

№ 6

№ 6. Упростите выражение: $\dfrac{\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{4}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{4x}+\sqrt[3]{16}\right)}$.

А) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}$; Б) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$; В) $\dfrac{\sqrt{x}-2}{x+4}$; Г) $\dfrac{1}{2}$.

Часть В

(ход решения записывается на отдельном листе)

№ 7

№ 7. Упростите выражение:

$$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}+\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}\right)^2\cdot\frac{a-b}{4\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}.$$

А) $\frac{a-b}{8\sqrt[4]{a}}$; Б) 0; В) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; Г) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

№ 8

№ 8. Найдите все рациональные корни уравнения:

$4x^4-8x^3+3x^2-8x+4=0.$

А) 0,5; 2; Б) −0,5; 0,5; −2; 2; В) 1; 4; Г) $\varnothing$.

Часть С

(ход решения и ответ записывается на отдельном листе)

№ 9. Определите наименьшее целое решение неравенства $\sqrt{x^2-3x}>4-x$.

Ответы и решения к тесту:

№ 1				№ 2	№ 3				№ 4	№ 5	№ 6	№ 7	№ 8
1	*2*	*3*	*4*		*1*	*2*	*3*	*4*					
В	*А*	*Б*	*Г*	*В*	*Г*	*В*	*А*	*Б*	*Б*	*Г*	*Б*	*Г*	*А*

№ 9

$\sqrt{x^2-3x}>4-x$

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4-x<0\\x^2-3x\geqslant 0\end{cases}\\\begin{cases}4-x\geqslant 0\\x^2-3x>(4-x)^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>4\\\left[\begin{array}{l}x\leqslant 0\\x\geqslant 3\end{array}\right.\end{cases}\\\begin{cases}x\leqslant 4\\x>3{,}2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x>3{,}2$$

Наименьшим целым решением неравенства $x>3{,}2$ является число 4.

Ответ: 4.

Шкала успешности:

10–11 баллов – *отлично*
8–9 баллов – *хорошо*
5–7 баллов – *удовлетворительно*

§ 3. Расширение понятия степени

1. Степень с целым показателем

Пусть кто-нибудь попробует вычеркнуть из математики степени, и он увидит, что без них далеко не уедешь.

М.В. Ломоносов (1711–1765),
первый русский ученый-естествоиспытатель,
энциклопедист

Мы знаем определение степени с натуральным показателем:

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$

и определение степени с нулевым показателем:

$a^0 = 1$ ($a \neq 0$),

а также свойства степеней:

$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$; $a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n}$, если $m \geqslant n$, $a \neq 0$; $(a^m)^n = a^{mn}$.

Вспомним историю развития понятия степени. Сначала мы рассматривали степень только положительных чисел, затем отрицательных. В 7 классе мы ввели понятие степени для рационального числа a, потом, познакомившись с иррациональными числами, естественным образом распространили известное нам понятие степени (и ее свойства) на множество действительных чисел. Поэтому теперь мы оперируем определением степени с основанием $a \in \boldsymbol{R}$ и показателем $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}_0$.

Далее мы продолжим расширять понятие степени – только теперь мы будем расширять множество значений, которые может принимать показатель степени. Расширим его до множества целых чисел. Первый шаг был сделан нами в 7 классе: мы ввели определение для степени числа с нулевым показателем ($a^0 = 1$). В этом пункте мы рассмотрим степень с отрицательным показателем.

Чтобы расширить известное нам определение на случай целого отрицательного показателя, воспользуемся фундаментальным принципом развития математической теории: *вновь введенное понятие не должно нарушать все доказанные ранее свойства.*

Рассмотрим степень a^{-n} ($n \in \boldsymbol{N}$), представим ее в виде a^{0-n}, тогда, сохраняя известное нам свойство частного степеней, будем считать, что $a^{0-n} = \dfrac{a^0}{a^n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Введем следующее определение степени с целым отрицательным показателем.

Определение. Пусть $a \neq 0$, тогда $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, $n \in \boldsymbol{N}$.

Так, $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$, $a^{-2} = \dfrac{1}{a^2}$, $a^{-3} = \dfrac{1}{a^3}$ и т.д.

Эта запись облегчает запись десятичных дробей с большим числом нулей после запятой. Их можно записывать в виде отрицательных степеней числа 10:

$0{,}01 = \dfrac{1}{100} = \dfrac{1}{10^2} = 10^{-2}$; аналогично $0{,}000001 = 10^{-6}$.

$$0{,}0003 = \frac{3}{10\,000} = 3 \cdot \frac{3}{10^4} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ и т.д.}$$

Самое важное, что при таком определении все **основные свойства степени:**

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{I. } a^{m+n} = a^m \cdot a^n \\ \text{II. } a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n} \\ \text{III. } (a^m)^n = a^{mn} \end{array}}$$

сохраняются при всех целых значениях m, n (а не только натуральных). Только теперь мы будем считать, что $a \neq 0$ (число 0 нельзя возводить в нулевую степень и целую отрицательную степень; при этом $0^n = 0$ при $n \in N$).

Например, $a^{-5} \cdot a^{-6} = a^{-11}$; $\dfrac{a^{23}}{a^{-3}} = a^{26}$; $(a^3)^{-5} = a^{-15}$ и т.д.

* * *

Докажем свойства I – III (соответствующие свойства для $m, n \in N$ считаем известными).

Доказательство.

I. Если одно из чисел m, n равно нулю (например, $m = 0$), то независимо от n $a^{m+n} = a^{0+n} = a^n = 1 \cdot a^n = a^0 \cdot a^n = a^m \cdot a^n$. Если ни одно из чисел m, n не равно 0, то рассмотрим разные случаи знаков чисел m и n.

1) Если $m, n \in N$ – свойство известно.

2) Если m, n – целые отрицательные числа, то $m = -p$, $n = -q$, где $p, q \in N$.

Тогда $a^{m+n} = a^{-p-q} = a^{-(p+q)} = \dfrac{1}{a^{p+q}} = \dfrac{1}{a^p} \cdot \dfrac{1}{a^q} = a^{-p} \cdot a^{-q} = a^m \cdot a^n$.

3) Пусть теперь числа m и n разного знака (для определенности $m > 0$, $n < 0$).

Тогда $n = -p$, $p \in N$, и $a^{m+n} = a^{m-p}$.

Если $m = p$, то $a^{m+n} = a^0 = 1 = \dfrac{a^m}{a^p} = a^m \cdot \dfrac{1}{a^p} = a^m \cdot a^{-p} = a^m \cdot a^n$.

Если $m > p$, то $a^{m+n} = a^{m-p} = \dfrac{a^m}{a^p} = a^m \cdot \dfrac{1}{a^p} = a^m \cdot a^{-p} = a^m \cdot a^n$.

Наконец, если $m < p$, то $p - m \in N$.

Тогда $a^{m+n} = a^{m-p} = a^{-(p-m)} = \dfrac{1}{a^{p-m}} = \dfrac{1}{\dfrac{a^p}{a^m}} = \dfrac{a^m}{a^p} = a^m \cdot \dfrac{1}{a^p} = a^m \cdot a^{-p} = a^m \cdot a^n$.

Свойство I доказано для любых $m, n \in Z$, $a \neq 0$.

II. Пусть $-n = p \in Z$. Тогда при любом $a \neq 0$ $a^{m-n} = a^{m+p} = a^m \cdot a^p = a^m \cdot a^{-n}$ (свойство уже доказано при всех $m, p \in Z$). Но $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ при любом целом (а не только натуральном) n. В самом деле, при $n \in N$ это следует из определения.

При $n = 0$ имеем: $a^{-0} = a^0 = 1 = \dfrac{1}{a^0}$.

Наконец, при $n = -k$, $k \in N$ имеем: $a^{-n} = a^k = \dfrac{1}{\dfrac{1}{a^k}} = \dfrac{1}{a^n}$. Поэтому при любых m, n:

$$a^{m-n} = a^m \cdot a^{-n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n}.$$

Свойство II доказано для любых $m, n \in Z$, $a \neq 0$. Отметим, что тем самым доказано, что $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ при любом целом n.

III. Так как $1^n = 1$ для любого целого n, то
при $m = 0$ имеем: $(a^m)^n = (a^0)^n = 1^n = 1 = a^0 = a^{mn}$;
при $n = 0$ имеем: $(a^m)^n = (a^m)^0 = 1 = a^0 = a^{mn}$.
Пусть теперь ни одно из чисел m, n не равно 0. Рассмотрим разные случаи знаков чисел m и n.
Если $m, n \in \mathbf{N}$ – свойство известно.
Если $m < 0$, $n < 0$, то $m = -p$, $n = -q$, $p, q \in \mathbf{N}$.
Тогда $(a^m)^n = (a^{-p})^{-q} = \left(\dfrac{1}{a^p}\right)^{-q} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{a^p}\right)^q} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{(a^p)^q}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{a^{pq}}} = a^{pq} = a^{(-m)\cdot(-n)} = a^{mn}$.
Если $m < 0$, $n > 0$, то $m = -p$, $p \in \mathbf{N}$.
Тогда $(a^m)^n = (a^{-p})^n = \left(\dfrac{1}{a^p}\right)^n = \dfrac{1}{(a^p)^n} = \dfrac{1}{a^{pn}} = a^{-pn} = a^{mn}$.
Наконец, если $m > 0$, $n < 0$, то $n = -q$, $q \in \mathbf{N}$.
Тогда $(a^m)^n = (a^m)^{-q} = \dfrac{1}{(a^m)^q} = \dfrac{1}{a^{mq}} = a^{-mq} = a^{mn}$.
Свойство III доказано для любых $m, n \in \mathbf{Z}$, $a \neq 0$. ■

Приведем более сложные примеры преобразования выражений, содержащих степени с целыми показателями.

Пример 1. Упростить выражения:

а) $\dfrac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-5}\cdot(2{,}25)^{-3}}{(3{,}375)^{-2}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^4}$; б) $\dfrac{\left((-2)^3\right)^5\cdot 4^{-2}}{(-2)^{14}\cdot 2^{-3}}$; в) $(1-(1-2^{-1})^{-1})^{-1}+(1+(1+2^{-1})^{-1})^{-1}$.

Решение.
а) Приведем степени к одному и тому же основанию.
Заметим, что $2{,}25 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$, $3{,}375 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^3$, $\dfrac{2}{3} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1}$.
Поэтому искомое выражение равно

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{-5}\cdot\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^{-3}}{\left(\left(\frac{3}{2}\right)^3\right)^{-2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{-5}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-6}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-6}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-5+4} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1} = \frac{2}{3}.$$

б) Искомое выражение равно $\dfrac{(-2)^{15}\cdot(2^2)^{-2}}{(-2)^{14}\cdot 2^{-3}} = (-2)\cdot\dfrac{2^{-4}}{2^{-3}} = (-2)\cdot 2^{-4+3} = (-2)\cdot 2^{-1} = -1$.

в) Так как $1 - 2^{-1} = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, а $1 + 2^{-1} = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$, то искомое выражение равно

$$\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)^{-1}+\left(1+\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right)^{-1} = (1-2)^{-1}+\left(1+\frac{2}{3}\right)^{-1} = (-1)^{-1}+\left(\frac{5}{3}\right)^{-1} = -1+\frac{3}{5} = -\frac{2}{5}.$$

Пример 2. Упростить выражения:

а) $\dfrac{a^{-n}+b^{-n}}{a^{-2n}-b^{-2n}}:\left(\dfrac{1}{b^{-n}}-\dfrac{1}{a^{-n}}\right)^{-1}$, где $n \in \mathbf{Z}$;

б) $\left(\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-2}+b^{-2}}\right)^{-1}\cdot\left(\left(\dfrac{b}{3a}\right)^{-1}+\left(\dfrac{a}{3b}\right)^{-1}\right)^{-1}\cdot\dfrac{3(a^{-1}+b^{-1})}{(ab)^{-1}}$;

в) $\left(\left(\dfrac{9^{-2}}{a^{-24}}-\dfrac{16}{b^{-8}}\right):\left(\dfrac{a^{12}}{3^2}+\dfrac{b^4}{2^{-2}}\right)\right):\left(\dfrac{3^{-1}}{a^{-6}}-\dfrac{1}{2^{-1}b^{-2}}\right)$.

Решение.

а) Искомое выражение равно

$$\frac{\dfrac{1}{a^n}+\dfrac{1}{b^n}}{\dfrac{1}{a^{2n}}-\dfrac{1}{b^{2n}}}\cdot\left(\frac{1}{b^{-n}}-\frac{1}{a^{-n}}\right)=\frac{\dfrac{b^n+a^n}{a^nb^n}}{\dfrac{b^{2n}-a^{2n}}{a^{2n}b^{2n}}}\cdot(b^n-a^n)=\frac{(b^n+a^n)(b^n-a^n)a^{2n}b^{2n}}{(b^{2n}-a^{2n})a^nb^n}=a^nb^n.$$

б) Искомое выражение равно

$$\frac{a^{-2}+b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}\cdot\left(\frac{3a}{b}+\frac{3b}{a}\right)^{-1}\cdot 3ab\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}\cdot\left(\frac{3a^2+3b^2}{ab}\right)^{-1}\cdot 3ab\cdot\frac{a+b}{ab}=$$

$$=\frac{\dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2}}{\dfrac{a+b}{ab}}\cdot\frac{ab}{3(a^2+b^2)}\cdot 3ab\cdot\frac{a+b}{ab}=\frac{(a^2+b^2)ab\cdot ab\cdot 3ab\cdot(a+b)}{(a+b)a^2b^2\cdot 3(a^2+b^2)\cdot ab}=1.$$

в) Так как $\dfrac{9^{-2}}{a^{-24}}-\dfrac{16}{b^{-8}}=\dfrac{a^{24}}{9^2}-4^2b^8=\left(\dfrac{a^{12}}{9}+4b^4\right)\left(\dfrac{a^{12}}{9}-4b^4\right)$, а $\dfrac{a^{12}}{3^2}+\dfrac{b^4}{2^{-2}}=\dfrac{a^{12}}{9}+4b^4$, то искомое выражение равно

$$\left(\frac{a^{12}}{9}-4b^4\right):\left(\frac{a^6}{3}-2b^2\right)=\left(\frac{a^6}{3}-2b^2\right)\left(\frac{a^6}{3}+2b^2\right):\left(\frac{a^6}{3}-2b^2\right)=\frac{a^6}{3}+2b^2.$$

Пример 3. Упростить выражения:

а) $$\frac{4\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)^{-1}+3\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}\right)^{-1}}{\left(6^{-1}+(\sqrt{6})^{-1}\right)^{-1}+\left(1+(\sqrt{6})^{-1}\right)^{-1}};$$

б) $$\frac{\sqrt{4-a^2}+a^2\sqrt{(4-a^2)^{-1}}}{(4-a^2)^{-1}}\cdot\sqrt{\left(1-\left(\frac{2}{a}\right)^{-2}\right)^{-1}},\ -2<a<2,\ a\neq 0.$$

Решение.

а) 1) Рассмотрим числитель дроби.

Имеем: $\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)^{-1}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\dfrac{3\sqrt{6}-3\cdot 2}{3-2}=3\sqrt{6}-6$;

$\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}\right)^{-1}=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\dfrac{4\cdot 3-4\sqrt{6}}{3-2}=12-4\sqrt{6}$, поэтому числитель в искомом выражении равен

$4(3\sqrt{6}-6)+3(12-4\sqrt{6})=12\sqrt{6}-24+36-12\sqrt{6}=12.$

2) Рассмотрим знаменатель дроби.

Так как $\left(6^{-1}+(\sqrt{6})^{-1}\right)^{-1}=\left(\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^{-1}=\left(\dfrac{1+\sqrt{6}}{6}\right)^{-1}=\dfrac{6}{1+\sqrt{6}}$

и $\left(1+(\sqrt{6})^{-1}\right)^{-1}=\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^{-1}=\left(\dfrac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}}\right)^{-1}=\dfrac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}$,

то знаменатель в искомом выражении равен

$$\frac{6}{1+\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}=\frac{6+\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}(\sqrt{6}+1)}{\sqrt{6}+1}=\sqrt{6}.$$

3) Искомое выражение равно $\frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{2 \cdot 6}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$.

б) 1) Рассмотрим первый множитель.

Числитель дроби равен

$$\sqrt{4-a^2} + a^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4-a^2}} = \sqrt{4-a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{4-a^2}} = \frac{4-a^2+a^2}{\sqrt{4-a^2}} = \frac{4}{\sqrt{4-a^2}}.$$

Значит, дробь (первый множитель) равна $\frac{4}{\sqrt{4-a^2}} \cdot (4-a^2) = 4\sqrt{4-a^2}$.

2) Второй множитель равен

$$\sqrt{\left(1-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{-1}} = \sqrt{\left(1-\frac{a^2}{4}\right)^{-1}} = \sqrt{\left(\frac{4-a^2}{4}\right)^{-1}} = \sqrt{\frac{4}{4-a^2}} = \frac{2}{\sqrt{4-a^2}}.$$

3) Искомое произведение равно $4\sqrt{4-a^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{4-a^2}} = 8$.

К **145** Запишите числа короче:

а) 1000; б) 2 000 000; в) 3 000 000 000; г) 4 000 000 000 000.

Какое понятие вы использовали для выполнения задания?

146 Упростите:

а) $a^5 \cdot a^{10} \cdot a^{10}$; б) $b^4 : b^3$; в) $\frac{x \cdot x^2 \cdot x^{12}}{x^4}$; г) $(y^5)^2 : y^{10}$; д) $\frac{x \cdot x^2}{(x^4)^2}$.

147 Какие числа записаны при помощи степеней?

а) 10^2; б) $3 \cdot 10^3$; в) $6 \cdot 10^6$; г) $9 \cdot 10^9$.

Запишите их без использования степени.

148 1) Какие числа записаны при помощи степеней?

а) 10^{-2}; б) $3 \cdot 10^{-3}$; в) $6 \cdot 10^{-6}$; г) $9 \cdot 10^{-9}$.

2) Чем отличается это задание от предыдущего? Достаточно ли ваших знаний о степени числа для выполнения этого задания? Расширьте понятие степени для отрицательного показателя, следуя плану:

1. Преобразуйте a^{-n} $(n \in N)$, используя известное свойство степеней $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$, допустив, что оно верно и при $n > m$.

2. Предположите, что называют степенью с *отрицательным* показателем.

3. Сопоставьте свое предположение с определением степени с *отрицательным* показателем на стр. 45.

3) Вернитесь к заданию, вызвавшему затруднение, и выполните его.

149 Запишите числа, используя понятие степени с *отрицательным* показателем:

а) $\frac{1}{1\,000\,000\,000}$; б) 0,000002; в) 0,000000003; г) 0,000000000004.

150 Вычислите:

а) 5^{-2}; б) 5^{-3}; в) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$; г) $\frac{1}{5^{-3}}$; д) $\left(\frac{1}{5^2}\right)^{-2}$.

151 Упростите выражения:

а) $\dfrac{(-2)^3\cdot(-2)^5}{\left((-2)^3\right)^2\cdot(-2)^{-7}}$; б) $\dfrac{((-3)^2)^4\cdot 9^{-5}}{(-27)^2\cdot 3^{-7}}$; в) $\dfrac{\left(-\dfrac{5}{2}\right)^{-3}\cdot 0{,}16^{-2}}{6{,}25^2\cdot 0{,}4^5}$; г) $(1+(2^{-1}+3^{-1})^{-1})^{-1}$.

152 Упростите выражения

а) $\left(\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}}\right)^{-1}\cdot\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{(ab)^{-1}}$;

б) $\left((a^{-3}-a^{-1}b^{-2}-b^{-3})(b^3-a^2b-a^3)^{-1}\right)^{-1}$.

П **153** Второй член арифметической прогрессии составляет 107% от первого. Сколько процентов от первого члена составляет десятый член этой прогрессии?

154 Первый член арифметической прогрессии равен -5, сумма двадцати трех ее первых членов равна 1909. Найдите разность и двадцать третий член этой прогрессии.

155 Решите неравенства:

а) $\sqrt{5x-1}<-1$; в) $\sqrt{6x+5}\geqslant 3$; д) $\sqrt{x+4}<5$;

б) $\sqrt[3]{1-2x}\leqslant -2$; г) $\sqrt{3x-2}>-3$; е) $\sqrt[5]{x-6}\geqslant -2$.

156 Решите неравенства:

а) $\sqrt{5x^2-x+5}>3$; б) $\sqrt{x^2-8x}<2$; в) $\sqrt[3]{x^2-9x+10}\leqslant -2$.

Д **157** Упростите выражения:

а) $\dfrac{(625^{-2})^3\cdot 125^7}{(-25)^3\cdot 5^{-10}}$; б) $\dfrac{\left(\dfrac{5}{3}\right)^7\cdot 0{,}36^4}{\left(-7\dfrac{58}{81}\right)^{-2}\cdot 0{,}6^{-5}}$; в) $\sqrt{\dfrac{13}{(1^{-1}+(2^{-2}+3^{-3})^{-1})^{-1}}}$.

158 Упростите выражения:

а) $\left(\left(\dfrac{a^{-3}-b^{-3}}{a^{-1}-b^{-1}}+a^{-1}b^{-1}\right):(a+b)^2\right)^{-1}$;

б) $\left(\dfrac{(a-b)(a^2+b^2)}{a^{-4}-b^{-4}}\right):\left(\dfrac{a^4}{b^{-4}}\right)$.

159 Второй член арифметической прогрессии составляет 88% от первого. Сколько процентов от первого члена составляет пятый член этой прогрессии?

160 Первый член арифметической прогрессии равен 81, а сумма тридцати четырех ее первых членов равна 510. Найдите разность и тридцать четвертый член этой прогрессии.

161 Решите неравенства:

а) $\sqrt{4-5x}\leqslant 0$; в) $\sqrt{6-x}>5$; д) $\sqrt{5-x}\leqslant 6$;

б) $\sqrt{x+4}\leqslant -8$; г) $\sqrt{7x+9}>-9$; е) $\sqrt[5]{x+1}\geqslant -3$.

162 Решите неравенства:

а) $\sqrt{2x^2-3x+4}\geqslant 3$; б) $\sqrt{x^2-8x}<2$; в) $\sqrt[3]{x^2+7x-29}>1$.

С **163*** Числа x^3+x^{-1} и $x+x^{-3}$ – рациональные. Докажите, что x – рациональное число.

2. Степень с рациональным показателем

Ничто с такой силой не побуждает высокие умы к работе над обогащением знания, как постановка трудной и в то же время полезной задачи.

И. Бернулли (1667–1748),
швейцарский математик и механик

В предыдущем пункте мы, рассмотрев степень с целым показателем, получили определение для степени с целым показателем. А можно ли рассмотреть степень с дробным показателем? В этом пункте мы ответим на этот вопрос, используя понятие корня n-й степени.

Пусть a – положительное число. Рассмотрим выражение $a^{\frac{m}{n}}$, где $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$. Для него должно сохраняться свойство III возведения в степень: $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n}\cdot n} = a^m$. С другой стороны, из определения корня n-й степени следует, что $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n = a^m$. Будем считать, что $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Дадим определение степени с рациональным показателем.

Определение. Пусть $a > 0$, $\dfrac{m}{n}$ – рациональное число, где $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$, тогда:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Например, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$, $a^{-\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{a^{-3}}$, и т.д.

Ясно также, что $a^{\frac{m}{1}} = \sqrt[1]{a^m} = a^m$, $m \in \boldsymbol{Z}$, то есть получим привычное значение a^m.

* * *

Убедимся в том, что введенное нами определение *корректно*, то есть a^r имеет одно и то же значение вне зависимости от представления рационального числа r в виде $\dfrac{m}{n}$, где $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$.

Доказательство.

В самом деле, пусть $r = \dfrac{m_1}{n_1} = \dfrac{m_2}{n_2}$, где $m_1, m_2 \in \boldsymbol{Z}$, $n_1, n_2 \in \boldsymbol{N}$.

В этом случае $m_1 n_2 = n_1 m_2$. Пусть $x_1 = a^{\frac{m_1}{n_1}}$, $x_2 = a^{\frac{m_2}{n_2}}$. Тогда

$$x_1^{n_1 m_2} = \left(x_1^{n_1}\right)^{m_2} = \left(\left(a^{\frac{m_1}{n_1}}\right)^{n_1}\right)^{m_2} = \left(\left(\sqrt[n_1]{a^{m_1}}\right)^{n_1}\right)^{m_2} = \left(a^{m_1}\right)^{m_2} = a^{m_1 m_2};$$

$$x_2^{m_1 n_2} = \left(x_2^{n_2}\right)^{m_1} = \left(\left(a^{\frac{m_2}{n_2}}\right)^{n_2}\right)^{m_1} = \left(\left(\sqrt[n_2]{a^{m_2}}\right)^{n_2}\right)^{m_1} = \left(a^{m_2}\right)^{m_1} = a^{m_1 m_2}.$$

Пусть $p = m_1 n_2 = n_1 m_2 \in \boldsymbol{Z}$. Тогда $x_1^p = x_2^p$, $x_1, x_2 > 0$. Если $p \in \boldsymbol{N}$, то из единственности корня степени p из положительного числа следует, что $x_1 = x_2$. Если p – целое отрицательное число, то $p = -q$, $q \in \boldsymbol{N}$. Тогда $x_1^p = \dfrac{1}{x_1^q}$, $x_2^p = \dfrac{1}{x_2^q}$, то есть $x_1^q = x_2^q$ и аналогично $x_1 = x_2$ (это следует из единственности корня степени q из положительного числа).

Наконец, если $p = 0$, то $m_1 = m_2 = 0$ (так $n_1, n_2 \in \boldsymbol{N}$) и $x_1 = a^{\frac{0}{n_1}} = \sqrt[n_1]{a^0} = \sqrt[n_1]{1} = 1$ и аналогично $x_2 = 1$, то есть в любом случае $x_1 = x_2$. Поэтому значение a^r не зависит от представления r в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$.

Например, $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{4}{6}} = \sqrt[6]{a^4}$. Равенство этих выражений, кстати, следует и из свойства VI корня n-й степени (см. п.4.1.1.). Только что доказанная корректность определения a^r может быть выведена и из этого свойства. ■

Замечание. Если n – нечетное натуральное число, или m и n оба четны, то в равенстве $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ обе части имеют разные области определения. В самом деле,

$\sqrt[3]{a^5}$ определен при всех a, $a^{\frac{5}{3}}$ – только при $a > 0$;

$\sqrt[5]{a^8}$ определен при всех a, $a^{\frac{8}{5}}$ – только при $a > 0$;

$\sqrt[6]{a^{10}}$ определен при всех a, $a^{\frac{10}{6}}$ – только при $a > 0$.

И только в случае, когда n – четно, а m – нечетно, оба выражения определены только при $a > 0$ (да и то $\sqrt[n]{a^m}$ может быть определен и при $a = 0$). Возникает вопрос: зачем в определении $a^{\frac{m}{n}}$ требуется положительность числа a, если формально $\sqrt[n]{a^m}$ может быть определено и при отрицательных значениях a?

Это нужно именно для корректности определения $a^{\frac{m}{n}}$. В самом деле, определение $a^{\frac{m}{n}}$ нужно дать так, чтобы, например, $a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{6}}$ при всех значениях a. Но $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$, $a^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{|a|}$, если a может принимать и отрицательные значения. Таким образом, если определить $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$ и $a^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{a^2}$ при всех a, то $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a} \neq \sqrt[6]{a^2} = a^{\frac{2}{6}}$ при $a < 0$, что недопустимо ($r_1 = r_2$, но $a^{r_1} \neq a^{r_2}$). Итак, напоминаем, что определение $a^{\frac{m}{n}}$ дается только для положительных значений a.

Докажем теперь, что для степени с рациональным показателем сохраняются свойства I–III степени. При доказательстве будем использовать уже известные свойства степени с целым показателем.

I. $a^{r_1+r_2} = a^{r_1} \cdot a^{r_2}$, где $a > 0$, $r_1, r_2 \in \boldsymbol{Q}$.

Доказательство.

Пусть $r_1 = \frac{m_1}{n_1}$, $r_2 = \frac{m_2}{n_2}$, $m_1, m_2 \in \boldsymbol{Z}$, $n_1, n_2 \in \boldsymbol{N}$. Тогда $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = \sqrt[n_1]{a^{m_1}} \cdot \sqrt[n_2]{a^{m_2}}$; $r_1 + r_2 = \frac{m_1 n_2 + n_1 m_2}{n_1 n_2}$; $a^{r_1+r_2} = \sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1 n_2 + n_1 m_2}}$. Пусть $x_1 = a^{r_1} \cdot a^{r_2}$, $x_2 = a^{r_1+r_2}$. Тогда $x_2^{n_1 n_2} = a^{m_1 n_2 + n_1 m_2}$;

$x_1^{n_1 n_2} = \left(\sqrt[n_1]{a^{m_1}}\right)^{n_1 n_2} \cdot \left(\sqrt[n_2]{a^{m_2}}\right)^{n_1 n_2} = \left(a^{m_1}\right)^{n_2} \cdot \left(a^{m_2}\right)^{n_1} = a^{m_1 n_2} \cdot a^{m_2 n_1} = a^{m_1 n_2 + n_1 m_2}$.

Итак, $x_2^{n_1 n_2} = x_1^{n_1 n_2}$; из единственности значения корня степени $n_1 n_2$ из положительного числа следует, что $x_1 = x_2$. ■

II. $a^{r_1-r_2} = \frac{a^{r_1}}{a^{r_2}}$, где $a > 0$, $r_1, r_2 \in \boldsymbol{Q}$.

Доказательство.

$a^{r_1-r_2} = a^{r_1+(-r_2)} = a^{r_1} \cdot a^{-r_2}$. Но $a^{-r_2} = a^{-\frac{m_2}{n_2}} = \sqrt[n_2]{a^{-m_2}} = \sqrt[n_2]{\frac{1}{a^{m_2}}} = \frac{1}{\sqrt[n_2]{a^{m_2}}} = \frac{1}{a^{\frac{m_2}{n_2}}} = \frac{1}{a^{r_2}}$, поэтому $a^{r_1-r_2} = a^{r_1} \cdot \frac{1}{a^{r_2}} = \frac{a^{r_1}}{a^{r_2}}$. ■

III. $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$, где $a > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbf{Q}$.

Доказательство.

Пусть $x_1 = (a^{r_1})^{r_2}$, $x_2 = a^{r_1 r_2}$. Тогда $x_1 = \sqrt[n_2]{\left(\sqrt[n_1]{a^{m_1}}\right)^{m_2}}$; $r_1 r_2 = \dfrac{m_1 m_2}{n_1 n_2}$, $a^{r_1 r_2} = \sqrt[n_1 n_2]{a^{m_1 m_2}}$.

Имеем: $x_2^{n_1 n_2} = a^{m_1 m_2}$; $x_1^{n_1 n_2} = \left(x_1^{n_2}\right)^{n_1} = \left(\left(\sqrt[n_1]{a^{m_1}}\right)^{m_2}\right)^{n_1} = \left(\sqrt[n_1]{a^{m_1}}\right)^{m_2 n_1} = \left(\left(\sqrt[n_1]{a^{m_1}}\right)^{n_1}\right)^{m_2} = \left(a^{m_1}\right)^{m_2} = a^{m_1 m_2}$. Итак, $x_2^{n_1 n_2} = x_1^{n_1 n_2}$. Из единственности корня степени $n_1 n_2$ из положительного числа следует, что $x_1 = x_2$. ■

С помощью доказанных нами свойств можно упростить, например, следующие выражения:

$a^{\frac{1}{2}+\frac{3}{5}} = a^{\frac{11}{10}}$, $a^{\frac{1}{5}-\frac{1}{4}} = a^{-\frac{1}{20}}$, $\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{7}{6}} = a^{-\frac{7}{4}}$, $a > 0$.

Приведем более сложные примеры преобразования выражений, содержащих степени с рациональными показателями.

Пример 1. Упростить выражения:

а) $16^{-0,75} \cdot 25^{-0,5} + 64^{-\frac{2}{3}} \cdot 9^{1,5} - 100^{-0,5}$;

б) $\left(\left(\dfrac{1}{81}\right)^{-0,5} \cdot 10^{-3} + 10\,000^{-0,75}\right)^{0,5}$;

в) $\left(1+4^{\frac{1}{3}}+16^{\frac{1}{3}}\right)\left(1-2\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}\right)^{0,5}$.

Решение.

а) Запишем показатели степеней в виде обыкновенных дробей:

$$16^{-\frac{3}{4}} \cdot 25^{-\frac{1}{2}} + 64^{-\frac{2}{3}} \cdot 9^{\frac{3}{2}} - 100^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{25}} + \frac{1}{\sqrt[3]{64^2}} \cdot \sqrt{9^3} - \frac{1}{\sqrt{100}} =$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{\left(\sqrt[3]{64}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{9}\right)^3 - \frac{1}{10} = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4^2} \cdot 3^3 - \frac{1}{10} = \frac{1}{40} + \frac{27}{16} - \frac{1}{10} = \frac{129}{80} = 1,6125.$$

б) Выражение под знаком степени 0,5 равно

$$\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 10^{-3} + \left(10^4\right)^{-\frac{3}{4}} = 81^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{-3} + 10^{4\left(-\frac{3}{4}\right)} = 9 \cdot 10^{-3} + 10^{-3} = 10 \cdot 10^{-3} = 10^{-2} = \frac{1}{100}.$$

Искомое выражение равно $\left(\dfrac{1}{100}\right)^{0,5} = \sqrt{\dfrac{1}{100}} = \dfrac{1}{10}$.

в) Заметим, что $1-2\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16} = 1-2\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4^2} = 1-2\sqrt[3]{4}+\left(\sqrt[3]{4}\right)^2 = \left(1-\sqrt[3]{4}\right)^2$, поэтому $\left(1-2\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}\right)^{0,5} = \sqrt{\left(1-\sqrt[3]{4}\right)^2} = \left|1-\sqrt[3]{4}\right| = \sqrt[3]{4}-1$, так как $\sqrt[3]{4} > 1$. Тогда искомое выражение равно $\left(\left(\sqrt[3]{4}\right)^2+\sqrt[3]{4}+1\right)\left(\sqrt[3]{4}-1\right) = \left(\sqrt[3]{4}\right)^3 - 1^3 = 4-1 = 3$.

Пример 2. Упростить выражения

а) $\left(a^{-\frac{2}{3}}+a^{\frac{3}{4}}\right)\left(a^{-\frac{4}{3}}-a^{\frac{1}{12}}+a^{1,5}\right)$;

б) $\dfrac{b^{\frac{8}{7}}-a^{0,8}}{a^{\frac{6}{5}}+b^{\frac{12}{7}}}$;

в) $\left(\dfrac{0,5a^{\frac{1}{4}}}{(2-a)^{\frac{3}{4}}}+\dfrac{(2-a)^{\frac{1}{4}}a^{-\frac{3}{4}}}{2}\right):\left(2a-a^2\right)^{\frac{1}{4}}$;

г) $\dfrac{\left(a^{\frac{5}{9}}b^{-\frac{1}{9}}-a^{\frac{2}{9}}b^{\frac{2}{9}}\right)^3+3\left(a^{\frac{4}{3}}-\sqrt[3]{a^3 b}\right)}{\left(\sqrt[3]{a^{-1}}+\sqrt[3]{b^{-1}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)}-\dfrac{(a-b)^2}{2(a+b)}+\dfrac{a+b}{2}$.

Решение.

а) Перемножим многочлены, применяя свойство произведения степеней. Искомое выражение равно

$$a^{-\frac{2}{3}-\frac{4}{3}}+a^{\frac{3}{4}-\frac{4}{3}}-a^{-\frac{2}{3}+\frac{1}{12}}-a^{\frac{3}{4}+\frac{1}{12}}+a^{-\frac{2}{3}+\frac{3}{2}}+a^{\frac{3}{4}+\frac{3}{2}}=a^{-2}+a^{-\frac{7}{12}}-a^{-\frac{7}{12}}-a^{\frac{5}{6}}+a^{\frac{5}{6}}+a^{\frac{9}{4}}=a^{-2}+a^{\frac{9}{4}}.$$

Упрощение закончено.

б) Числитель преобразуем по формуле разности квадратов, знаменатель – по формуле суммы кубов. Искомое выражение равно

$$\frac{\left(b^{\frac{4}{7}}\right)^2-\left(a^{\frac{2}{5}}\right)^2}{\left(a^{\frac{2}{5}}\right)^3+\left(b^{\frac{4}{7}}\right)^3}=\frac{\left(b^{\frac{4}{7}}-a^{\frac{2}{5}}\right)\left(b^{\frac{4}{7}}+a^{\frac{2}{5}}\right)}{\left(a^{\frac{2}{5}}+b^{\frac{4}{7}}\right)\left(a^{\frac{4}{5}}-a^{\frac{2}{5}}\cdot b^{\frac{4}{7}}+b^{\frac{8}{7}}\right)}=\frac{b^{\frac{4}{7}}-a^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{4}{5}}-a^{\frac{2}{5}}\cdot b^{\frac{4}{7}}+b^{\frac{8}{7}}}.$$

Приведенное преобразование вряд ли можно назвать упрощением исходного выражения; произведено сокращение дроби.

в) Делимое равно

$$\frac{a^{\frac{1}{4}}}{2(2-a)^{\frac{3}{4}}}+\frac{(2-a)^{\frac{1}{4}}}{2a^{\frac{3}{4}}}=\frac{a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{3}{4}}+(2-a)^{\frac{3}{4}}\cdot(2-a)^{\frac{1}{4}}}{2a^{\frac{3}{4}}(2-a)^{\frac{3}{4}}}=\frac{a^1+(2-a)^1}{2(2a-a^2)^{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{(2a-a^2)^{\frac{3}{4}}}.$$

Искомое выражение равно

$$\frac{1}{(2a-a^2)^{\frac{3}{4}}}\cdot\frac{1}{(2a-a^2)^{\frac{1}{4}}}=\frac{1}{(2a-a^2)^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}}=\frac{1}{2a-a^2}.$$

г) Числитель первой дроби равен

$$\left(a^{\frac{5}{9}}b^{-\frac{1}{9}}-a^{\frac{2}{9}}b^{\frac{2}{9}}\right)^3+3\left(a^{\frac{4}{3}}-ab^{\frac{1}{3}}\right)=$$

$$=\left(a^{\frac{5}{9}}b^{-\frac{1}{9}}\right)^3-3\left(a^{\frac{5}{9}}b^{-\frac{1}{9}}\right)^2a^{\frac{2}{9}}b^{\frac{2}{9}}+3a^{\frac{5}{9}}b^{-\frac{1}{9}}\left(a^{\frac{2}{9}}b^{\frac{2}{9}}\right)^2-\left(a^{\frac{2}{9}}b^{\frac{2}{9}}\right)^3+3a^{\frac{4}{3}}-3ab^{\frac{1}{3}}=$$

$$=a^{\frac{5}{3}}b^{-\frac{1}{3}}-3a^{\frac{10}{9}}b^{-\frac{2}{9}}a^{\frac{2}{9}}b^{\frac{2}{9}}+3a^{\frac{5}{9}}b^{-\frac{1}{9}}a^{\frac{4}{9}}b^{\frac{4}{9}}-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{4}{3}}-3ab^{\frac{1}{3}}=$$

$$=a^{\frac{5}{3}}b^{-\frac{1}{3}}-3a^{\frac{4}{3}}+3ab^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{4}{3}}-3ab^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{5}{3}}b^{-\frac{1}{3}}-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}(a-b).$$

Знаменатель первой дроби равен

$$\left(\sqrt[3]{\frac{1}{a}}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)=\frac{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})\left((\sqrt[3]{a})^2-\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2\right)}{\sqrt[3]{ab}}=$$

$$=\frac{(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3}{\sqrt[3]{ab}}=(a+b)a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}.$$

Первая дробь равна

$$\frac{a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}(a-b)}{(a+b)a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}\cdot\frac{a-b}{a+b}=\frac{a(a-b)}{a+b}.$$

Искомое выражение равно

$$\frac{a(a-b)}{a+b}-\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}+\frac{a+b}{2}=\frac{a-b}{a+b}\left(a-\frac{a-b}{2}\right)+\frac{a+b}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}=\frac{a-b}{2}+\frac{a+b}{2}=a.$$

К **164** Упростите:

а) $(\sqrt{a})^2$; б) $(\sqrt[3]{b^2})^3$; в) $(y^2)^5$; г) $\dfrac{(\sqrt[12]{c})^{12}}{(c^3)^2}$.

Какие свойства вы использовали для выполнения задания?

165 Какие числа записаны при помощи степеней: а) 9^2; б) 8^3?
Запишите их без использования степени.

166 1) Какие числа записаны при помощи степеней: а) $9^{\frac{1}{2}}$; б) $8^{\frac{1}{3}}$?

2) Чем отличается это задание от предыдущего? Достаточно ли ваших знаний о степени числа для выполнения этого задания? Расширьте понятие степени для рационального показателя, следуя плану:

1. Преобразовать $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n$, используя известное свойство степеней $(a^m)^n = a^{mn}$, допустив, что оно верно и при рациональных m.

2. Преобразовать $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n$, используя известное свойство корней n-й степени.

3. Сопоставить полученные результаты и предположить, что называют степенью с *рациональным* показателем.

4. Сопоставить свое предположение с определением степени с *рациональным* показателем на стр. 51.

3) Вернитесь к заданию, вызвавшему затруднение, и выполните его.

167 Запишите степени числа в виде корня:

а) $5^{\frac{1}{2}}$; б) $5^{\frac{1}{3}}$; в) $5^{\frac{2}{3}}$; г) $5^{\frac{3}{2}}$.

168 Запишите корни в виде степени:

а) $\sqrt[3]{5}$; б) $\sqrt[3]{5^2}$; в) $\sqrt[3]{5^4}$; г) $\sqrt[4]{5^3}$.

169 Запишите степени числа в виде дроби:

а) $5^{-\frac{1}{2}}$; б) $5^{-\frac{1}{3}}$; в) $5^{-\frac{2}{3}}$; г) $5^{-\frac{3}{2}}$.

Избавьтесь от иррациональности в знаменателе.

170 Упростите выражения:

а) $(81^{-0,25}\cdot 25^{0,5} - 32^{0,2} : 9^{0,5})^{-0,35}$;

б) $\left(\left(\dfrac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 10^{-5} + 10\,000^{-1,25}\right)^{-0,5}$;

в) $\left(1+5^{\frac{1}{3}}+25^{\frac{1}{3}}\right)\left(1+2\sqrt[3]{-5}+\sqrt[3]{25}\right)^{0,5}$.

171 Упростите выражения:

а) $\left(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{4}}\right)\left(x + x^{-\frac{1}{2}}\right)(x^{0,5} + x^{-0,25})\,x$;

б) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}} + \left(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{5}}\right)^2 + b^{0,8}}{a^2 - b^{1,2}}$;

в) $\left(\left(\dfrac{1}{t^{\frac{3}{4}}-1} - \dfrac{1}{t^{1,5}-1}\right)^{-1}\left(t^3 + t\sqrt{t}+1\right) + t^{-0,75}\right)^{0,8}$.

П **172** Напишите формулу n-го члена арифметической прогрессии (a_n), если:

а) $a_2 + a_5 = 41,\ a_1 \cdot a_3 = 144$; б) $a_2 \cdot a_5 = 112,\ \dfrac{a_1}{a_5} = 2$.

173 Найдите сумму всех трехзначных натуральных чисел, кратных восьми.

174 Упростите выражения:

а) $(x^3 + y^3)(x + y)^{-1}$; б) $(yx^3 - xy) \cdot \dfrac{(x-1)^{-1}}{xy}$; в) $\left(\left(\dfrac{x^2-2x+2}{x^4+4}\right)^{-1} - 1\right)(x+1)^{-1}$.

175 Вычислите: $\dfrac{0{,}6}{2^{-2}+5^{-2}} - \left(\left(2\dfrac{1}{14}\right)^{-2} - \left(1\dfrac{14}{15}\right)^{-2}\right)$.

176 Упростите выражение:

$$\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-3}+b^{-3}} : \frac{a^2b^2}{(a+b)^2-3ab} \cdot \left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{-1}.$$

Д **177** Упростите выражения:

а) $\left((243^{0,2} \cdot 625^{-0,25} - 1024^{0,1} : 25^{0,5}) \cdot 125^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{2}{3}}\right)^{-0,5}$;

б) $\left(\left(\left(\dfrac{1}{125}\right)^{-\frac{2}{3}} + 0{,}0001^{-0,5}\right)\right)^{-\frac{1}{3}}$;

в) $\left(5^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}}\right)\left(\sqrt{125} - 15\sqrt{3} + 9\sqrt{5} - \sqrt{27}\right)^{\frac{1}{3}}$.

178 Упростите выражения:

а) $\left(x^{-\frac{1}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)\left(x^{-\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{4}{3}}\right) : x^{-1}$;

б) $\left(\dfrac{x^3 - 2x^{1,5}y^{\frac{7}{4}} + y^{3,5}}{x\sqrt{x} - 2x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{7}{8}} + y^{1,75}}\right)^{\frac{1}{2}}$;

в) $\left(\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{t}-1} + 1 + t^{\frac{1}{3}}\right)\left(1 - \dfrac{\sqrt[3]{t^2}}{t}\right)\right)^{1,5}$.

179 Напишите формулу n-го члена арифметической прогрессии (a_n), если:

а) $a_2 + 2a_4 = 27,\ a_{17} = 50$; б) $a_3 \cdot a_4 = 28,\ \dfrac{a_1}{a_5} = 13$.

180 Найдите сумму всех трехзначных натуральных чисел, кратных трем.

181 Вычислите:

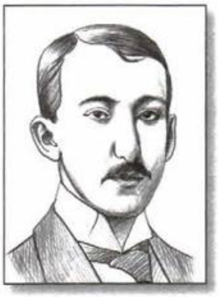
$$3 \cdot \left(\left(2\frac{1}{6}\right)^{-2} - \left(1\frac{6}{7}\right)^{-2}\right) - \frac{1}{2^{-2}+3^{-2}}.$$

182 Упростите выражение:

$$\frac{m^{-6}-64}{4+2m^{-1}+m^{-2}} \cdot \frac{m^2}{4-4m^{-1}+m^{-2}} - \frac{4m^2(2m+1)}{1-2m}.$$

С **183*** Может ли сумма 100 последовательных натуральных чисел оканчиваться той же цифрой, что и сумма следующих 98 чисел?

3*. Степенная функция $y = kx^n$



Мыслящий ум не чувствует себя счастливым, пока ему не удается связать воедино разрозненные факты, им наблюдаемые.

Д. Хевеши (1885–1966), венгерский радиохимик

В 8 классе мы знакомились со степенной функцией $y = x^n$ с натуральным показателем, подробно останавливаясь на случаях $y = x^2$ и $y = x^3$. Теперь, владея понятием степени с рациональным показателем, мы можем уточнить и систематизировать имеющиеся у нас знания об этой функции, рассматривая ее более общий вид с рациональным показателем.

Сначала введем определение.

Определение. **Степенной функцией** называется функция $y = kx^n$, где $k \neq 0$, $n \in \boldsymbol{Q}$.

При рассмотрении свойств и графиков степенной функции в этом пункте мы будем считать, что $k = 1$; при произвольном $k \neq 0$ график получается из графика $y = x^n$ известным нам преобразованием графика $y = f(x)$ в график $y = kf(x)$ – растяжением либо сжатием относительно оси Ox.

I. Сначала уточним **область определения** этой функции.

При натуральных n функция $y = x^n$ определена при всех $x \in \boldsymbol{R}$; при $n = 0$ и целых отрицательных n функция $y = x^n$ определена при $x \neq 0$.

При рациональных нецелых n функция $y = x^n$ определена при всех $x > 0$.

II. Опишем промежутки **возрастания и убывания** функции, доказав следующую теорему.

Теорема. При рациональных $r > 0$ функция $y = x^r$ строго возрастает на $(0; +\infty)$, при рациональных $r < 0$ – строго убывает на $(0; +\infty)$.

Доказательство.

Пусть $x_1 > x_2 > 0$. Тогда при натуральных n имеет место неравенство $x_1^n > x_2^n$; значит, функция $y = x^n$ строго возрастает на $(0; +\infty)$ (это свойство уже было отмечено, например, в п.4.1.1.). Пусть теперь r – положительное рациональное число, т.е. $r = \frac{m}{n}$, где $m, n \in \boldsymbol{N}$. По свойству VII корня n-й степени (п.4.1.1.), если $x_1 > x_2 > 0$, то $\sqrt[n]{x_1} > \sqrt[n]{x_2}$, т.е. $x_1^{\frac{1}{n}} > x_2^{\frac{1}{n}} > 0$. В силу строгого возрастания функции $y = x^m$ на $(0; +\infty)$ выполняется неравенство $\left(x_1^{\frac{1}{n}}\right)^m > \left(x_2^{\frac{1}{n}}\right)^m$, т.е. $x_1^{\frac{m}{n}} > x_2^{\frac{m}{n}}$. Значит, функция $y = x^r$ строго возрастает на $(0; +\infty)$.

Пусть теперь r – отрицательное рациональное число. Тогда $-r$ — положительное рациональное число, и по только что доказанному функция $y = x^{-r}$ строго возрастает на $(0; +\infty)$. Значит, если $x_1 > x_2 > 0$, то $x_1^{-r} > x_2^{-r}$, т.е. $\frac{1}{x_1^r} > \frac{1}{x_2^r} > 0$; поэтому $x_2^r > x_1^r$, т.е. функция $y = x^r$ строго убывает на $(0; +\infty)$. ■

III. Рассмотрим теперь **графики функций вида $y = x^n$, $n \in Q$.**

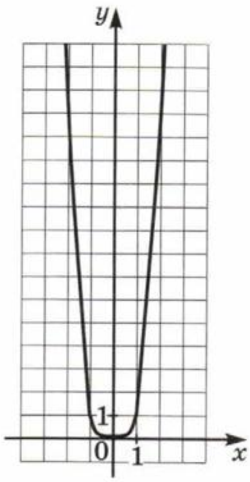
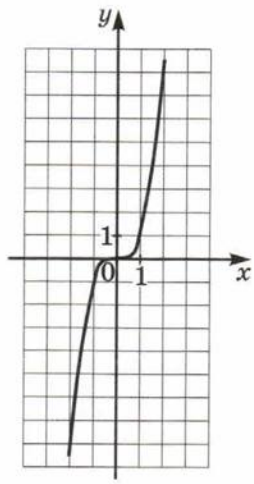
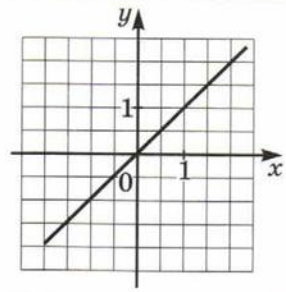
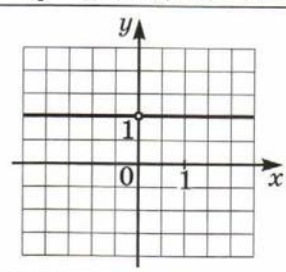
1. Пусть $n \in N$. Графики этого вида функции нам хорошо знакомы.

При четном n функция четна (определена при всех $x \in R$ и для всех x выполняется равенство $f(-x) = f(x)$). Функция возрастает на $[0; +\infty)$ и, в силу четности, убывает на $(-\infty; 0]$. График напоминает параболу $y = x^2$, только при $n = 4, 6, 8,...$ быстрее растет при неограниченном увеличении x и теснее прижимается к оси x при неограниченном уменьшении x по модулю.

При нечетном n функция нечетна (определена при всех $x \in R$ и для всех x выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$). Функция возрастает на $[0; +\infty]$ и, в силу нечетности, возрастает на всей числовой прямой. График напоминает кривую $y = x^3$, только при $n = 5, 7, 9, ...$ быстрее растет при неограниченном увеличении x и теснее прижимается к оси x при неограниченном уменьшении x по модулю.

При этом в случае $n = 1$ имеем функцию $y = x$, графиком которой является прямая – биссектриса первого и третьего координатных углов.

2. Пусть $n = 0$. Тогда $x^0 = 1$ при $x \neq 0$; значение 0^0 не определено. График – прямая $y = 1$ с выколотой точкой $(0; 1)$.

$y = x^n$, где $n = 2, 4, 6, 8...$	$y = x^n$, где $n = 3, 5, 7...$	$y = x^n$, где $n = 1$
		
		$y = x^n$, где $n = 0$
		

3. Пусть n **– целое отрицательное число**. Тогда функция определена при всех $x \neq 0$. При четном n функция четна. График $y = \frac{1}{x^n}$ изображен на рис. 1. Функция убывает на $(0; +\infty)$ и, в силу четности, возрастает на $(-\infty; 0)$. График имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ и горизонтальную асимптоту $y = 0$, при этом график «ближе расположен» к горизонтальной асимптоте, чем к вертикальной.

При нечетном отрицательном n функция нечетна. При $n = -1$ имеем гиперболу $y = \frac{1}{x}$ (график обратно пропорциональной зависимости – рис. 2). При $n \neq -1$ график напоминает гиперболу $y = \frac{1}{x}$, только он расположен «ближе» к горизонтальной асимптоте $y = 0$, чем к вертикальной асимптоте $x = 0$ (нет симметрии относительно прямых $y = x$ и

$y = -x$, характерной для гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$) – см. рис. 3. Функция убывает на $(0; +\infty)$ и, в силу нечетности, убывает также на $(-\infty; 0)$; однако функция не является монотонной на всей области определения $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

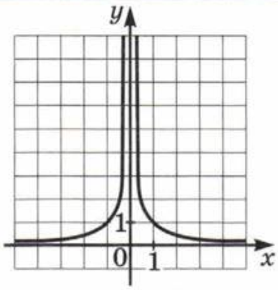
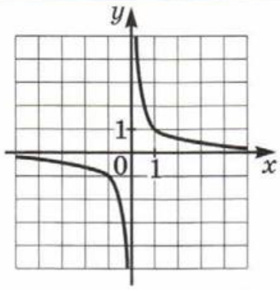
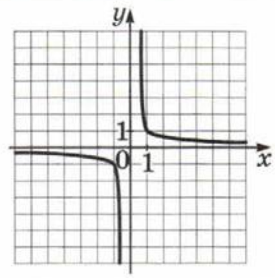
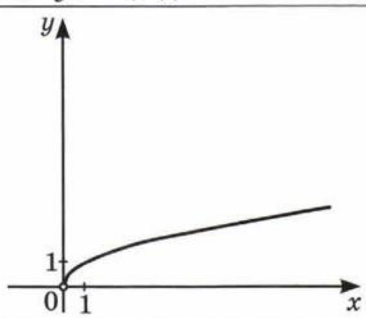
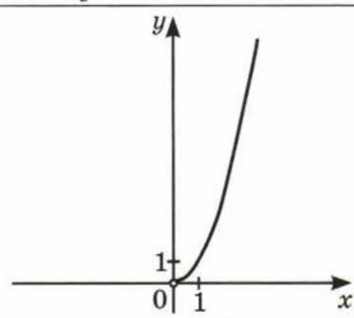
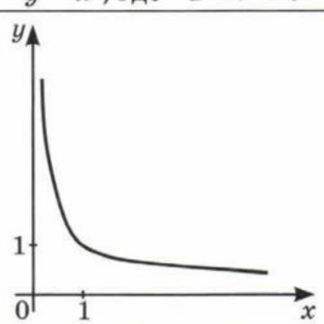
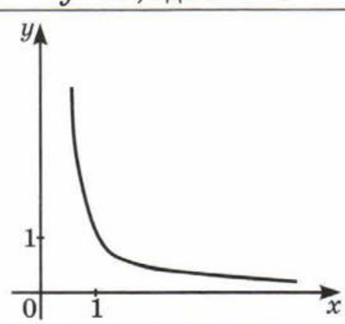
$y = x^n$, где $n = -2, -4, -6\ldots$	$y = x^n$, где $n = -1$	$y = x^n$, где $n = -3, -5, -7\ldots$
		

Рис.1 Рис.2 Рис. 3

4. Пусть r – **рациональное положительное число,** отличное от рассмотренных нами выше. Функция $y = x^r$ возрастает на $(0; +\infty)$ (точка $(0; 0)$ не принадлежит графику). График неограниченно растет при неограниченном увеличении x (тем быстрее, чем больше r) и неограниченно приближается к точке $(0; 0)$ при стремлении x к нулю (приближается к оси Ox при $r > 1$ и к оси Oy при $0 < r < 1$). При $r > 1$ график напоминает правую ветвь параболы $y = x^2$, а при $0 < r < 1$ – график $y = \sqrt{x}$.

5. Пусть, наконец, r – **отрицательное рациональное число.** Функция $y = x^r$ убывает на $(0; +\infty)$. График неограниченно приближается к оси Ox при неограниченном увеличении x (имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$) и неограниченно растет при стремлении x к нулю (имеет вертикальную асимптоту $x = 0$). При $r < -1$ график «ближе расположен» к горизонтальной асимптоте, чем к вертикальной, а при $0 > r > -1$ – наоборот.

$y = x^r$, где $0 < r < 1$	$y = x^r$, где $r > 1$
	
$y = x^r$, где $-1 < r < 0$	$y = x^r$, где $r < -1$
	

При $r = -1$ получим ветвь гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$, симметричную относительно прямой $y = x$ (при $r = -1$ график функции – полная гипербола из двух ветвей).

Обратим внимание, что мы не занимались точным построением графиков (не вычисляли координаты их точек); мы просто получили общее представление о различных особенностях графиков $y = x^r$ при различных рациональных r. Конечно, можно и построить эти графики, рассмотрев достаточное количество вспомогательных точек.

К **184** Из следующих функций:

а) $y = x^2$; в) $y = x^{-1}$; д) $y = \dfrac{1}{x}$; ж) $y = x^{\frac{1}{2}}$;

б) $y = x^3$; г) $y = \sqrt{x}$; е) $y = x^{-\frac{2}{3}}$; з) $y = x$

1) выберите пары одинаковых функций;

2) выберите те функции, свойства которых вами уже изучены.

3) выпишите функции с натуральным показателем степени; с целым отрицательным показателем степени; с дробным показателем степени.

Запишите все эти функции с помощью одной формулы. Как называется эта функция? Уточните определение этой функции с помощью учебника.

185 1) Какие случаи значения показателя нужно рассмотреть, чтобы систематизировать свойства функции $y = x^n$? Какие свойства функции вы будете рассматривать?

2) Проведите исследование по плану:

1. Уточните область определения функции $y = x^n$, опираясь на понятия дроби, корня n-й степени.

2. Постройте эскизы графиков $y = x^n$, рассмотрев различные значения n.

3. Укажите промежутки возрастания и убывания функции.

3) Сопоставьте свои выводы с учебником. Какие из них вам удалось получить самостоятельно?

186 Постройте графики функций:

а) $y = x^{\frac{2}{3}} + 2$; в) $y = x^{-0,2} + 3$;

б) $y = 1 - x^2\sqrt{x}$; г) $y = (x-1)^{-2,5}$.

П **187** Для арифметической прогрессии (a_n) упростите выражение $a_7^2 + 2a_7a_5 + a_5^2 - (a_8 + a_4)^2$.

188 Найдите седьмой член арифметической прогрессии (x_n), если $x_3 + x_{11} = 20$.

189 Найдите первый положительный член арифметической прогрессии (x_n), если $x_5 = -62$, $d = 0,4$.

190 Вычислите:

а) $4^{1,5} - 0,5^{-1} : 0,008^{\frac{1}{3}}$; б) $\left(-\dfrac{2}{7}\right)^{-2} + 144^{\frac{1}{2}}$.

191 Упростите выражения:

а) $\dfrac{\left(x^{\frac{3}{4}} \cdot y^{-\frac{1}{8}}\right)^{-2}}{\sqrt[3]{y\sqrt[4]{x^2y}}} \cdot \left(x^{-2}y^7\right)^{\frac{1}{6}}$; б) $\left(1 - m^{-\frac{1}{4}}\right)\left(m^{\frac{1}{2}} + m^{\frac{1}{4}}\right)\left(m^{\frac{1}{2}} + 1\right)$.

Д **192** Постройте графики функций:

а) $y=(x-1)^{0,6}$;   б) $y=x\sqrt{-x}$;   в) $y=x^{-\frac{2}{3}}-1$;   г) $y=(x+1)^{-\frac{4}{3}}$.

193 Для арифметической прогрессии (a_n) упростите выражение $4a_9^2-4a_1a_9+a_1^2-a_{17}^2$.

194 Найдите пятый член арифметической прогрессии (x_n), если $x_2+x_8=42$.

195 Найдите наибольший отрицательный член арифметической прогрессии (x_n), если $x_n=37{,}7-0{,}3n$.

196 Вычислите:

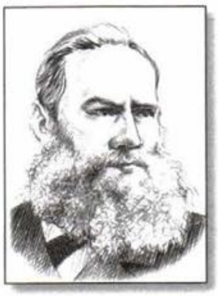
а) $9^{0,5}+0{,}064^{\frac{2}{3}}\cdot 1{,}6^{-1}$;   б) $196^{\frac{1}{2}}-\left(-\frac{5}{14}\right)^{-2}$.

197 Упростите выражения:

а) $\left(\frac{16}{c}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(0{,}5c^{-2}\right)^{\frac{2}{15}}:\sqrt[5]{2c^7}$;   б) $\left(t^{\frac{1}{4}}-1\right)\left(t^{-\frac{1}{4}}+1\right)\left(t^{\frac{1}{4}}+t^{\frac{3}{4}}\right)$.

С **198*** В классе на День защитника Отечества девочки принесли подарки для своих одноклассников-мальчиков: одна – 1 подарок, вторая – 2 подарка, третья – 3 подарка и т.д. Оказалось, что каждый мальчик получил одинаковое число подарков. На 8 Марта мальчики поздравляли одноклассниц и принесли: первый – 1 подарок, второй – 2 подарка, третий – 3 подарка и т.д. Также оказалось, что каждая девочка получила одинаковое число подарков. Докажите, что мальчиков или девочек (или и тех и других) в классе нечетное число.

4. Уравнения, содержащие неизвестное в рациональной степени



Знающий, но не умеющий – это механизм без двигателя.

Л. Н. Толстой (1828–1910),
русский писатель, мыслитель

Теперь, когда мы познакомились с понятием степени с рациональным показателем, круг посильных для нас уравнений расширился. В этом пункте мы рассмотрим некоторые примеры решения уравнений, содержащих неизвестное в рациональной степени.

Начнем с уравнений, содержащих неизвестное в степени с целым отрицательным показателем.

Пример 1. Решить уравнения:

а) $(17-(5x)^{-2})^{-1}=2^{-3}$;   б) $x+(-x)^{-1}=\frac{3}{2}$;   в) $\left(\frac{x+4}{2}\right)^{-4}+\left(2+\frac{x}{2}\right)^{-2}=2$.

Решение.

а) Применим определение степени с целым отрицательным показателем к уравнению:

$(17-(5x)^{-2})^{-1}=2^{-3}\Leftrightarrow 17-\frac{1}{(5x)^2}=2^3$.

Отметим, что уравнения $(f(x))^{-1} = (g(x))^{-1}$ и $f(x) = g(x)$ не являются равносильными, так как второе уравнение допускает равенство $f(x) = g(x) = 0$. В нашем примере преобразование равносильно, поскольку $g(x) = 2^3 \neq 0$.

Получили дробно-рациональное уравнение, решать которое мы умеем.

$$17-\frac{1}{(5x)^2}=2^3 \iff \begin{cases}(5x)^2=\dfrac{1}{9}\\ x\neq 0\end{cases} \iff \begin{cases}\left[\begin{array}{l}5x=\dfrac{1}{3}\\ 5x=-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.\\ x\neq 0\end{cases} \iff \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{15}\\ x=-\dfrac{1}{15}\end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{15}; -\frac{1}{15}\right\}$.

б) Перепишем уравнение, применяя определение степени с целым отрицательным показателем, в виде $x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$. Получили дробно-рациональное уравнение:

$$x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2} \iff 2x^2 - 3x - 2 = 0,\ x \neq 0.$$

Это уравнение имеет два корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $\left\{-\frac{1}{2}; 2\right\}$.

в) Перепишем уравнение $\left(\frac{x+4}{2}\right)^{-4}+\left(2+\frac{x}{2}\right)^{-2}=2$ в виде $\left(\frac{2}{x+4}\right)^{4}+\left(\frac{2}{x+4}\right)^{2}=2$ и сделаем замену $t=\left(\frac{2}{x+4}\right)^{2}$.

Заметим, что при такой замене $t > 0$. Получим квадратное уравнение $t^2 + t - 2 = 0$, имеющее два корня $t_1 = -2$ и $t_2 = 1$.

Так как $t > 0$, то $t = -2$ не подходит, и при возврате к старому неизвестному получим $t = \left(\frac{2}{x+4}\right)^2 = 1$, откуда $\frac{2}{x+4} = \pm 1$, то есть $x + 4 = \pm 2$.

Тогда $x = -2$, $x = -6$, при этом полученные корни не равны -4.

Ответ: $\{-2; -6\}$.

Рассмотрим уравнения, содержащие неизвестное в степени с дробным показателем.

Пример 2. Решить уравнения:

а) $(19-x^3)^{\frac{2}{3}}=9$; б) $\left(3x^2+13|x|\right)^{0,75}=8$; в) $(2-3x)^{\frac{4}{7}}=-1$.

Решение.

а) По определению степени с рациональным показателем $a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$, значит, фактически мы решаем иррациональное уравнение. Способ решения таких уравнений нам знаком – возведением в нужную степень мы избавлялись от корня. Применим эту идею для решения этого уравнения. Но сначала заметим, что обе части уравнения $(19-x^3)^{\frac{2}{3}}=9$ положительны, значит, возведение их в степень $\frac{3}{2}$ будет равносильным преобразованием.

Возводя обе части уравнения в степень $\frac{3}{2}$, получим равносильное уравнение $\left((19-x^3)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=9^{\frac{3}{2}}$, то есть $19 - x^3 = 27$, откуда $x^3 = -8$, значит, $x = -2$.

Ответ: $\{-2\}$.

Замечание. Областью допустимых значений уравнения является множество чисел x таких, что $19 - x^3 > 0$, но выписывать явно решение этого неравенства нет необходимости.

б) Избавимся от неизвестного в дробной степени аналогичным образом.

Возводя обе части уравнения в степень $\frac{4}{3}$, получим равносильное уравнение

$\left(\left(3x^2+13|x|\right)^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{3}} = 8^{\frac{4}{3}}$, то есть $3x^2+13|x| = 16$. Сделаем замену $|x| = t$, при этом $t \geqslant 0$. Получим квадратное уравнение $3t^2 + 13t - 16 = 0$.

Оно имеет два корня: $t_1 = 1$ и $t_2 = -\frac{16}{3}$.

Так как $t \geqslant 0$, то $t = |x| = 1$, откуда $x = \pm 1$.

Ответ: $\{-1; 1\}$.

в) Заметим, что в левой части уравнения стоит степень с рациональным показателем, а правая – отрицательна. Значит, уравнение $(2-3x)^{\frac{4}{7}} = -1$ не имеет решений, так как степенная функция с рациональным нецелым показателем принимает только положительные значения.

Итак, **при решении уравнений, содержащих неизвестное в рациональной степени**, можно использовать следующие **приемы:**

1. При отрицательном показателе степени мы избавляемся от минусов, переписывая степени в виде дробных выражений:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

2. При дробном показателе мы избавляемся от него путем возведения в нужную степень обеих частей уравнения:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{n}{m}} = a, a > 0.$$

К **199** Запишите в виде степени с положительным показателем:

а) x^{-2}; б) x^{-3}; в) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}$; г) $\left(\frac{1}{x-4}\right)^{-2}$.

200 1) Запишите степени в виде корня:

а) $x^{\frac{1}{2}}$; б) $x^{\frac{1}{3}}$; в) $x^{\frac{2}{3}}$; г) $(x-1)^{0,5}$.

2) Выполните возведение в степень:

а) $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2$; б) $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3$; в) $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$; г) $\left((x-1)^{0,5}\right)^2$.

201 Решите иррациональные уравнения:

а) $\sqrt{x+2} = x$; б) $\sqrt[3]{x^2} = 4$.

202 Чем отличаются уравнения: $x^{-2} - \frac{1}{4} = 0$; $x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} = 0$?

1) Решите уравнение, содержащее x в степени с целым отрицательным показателем, сводя его к известному случаю.

2) Решите уравнение, содержащее x в степени с дробным показателем, сводя его к известному случаю.

3) Обобщите способ решения таких уравнений. Сравните его со способом, предложенным на стр. 63 учебника.

203 Решите уравнения:

а) $\left((3x)^{-1}-7\right)^{-2}=\dfrac{1}{4}$; б) $x^{-1}-2x=\dfrac{7}{3}$; в) $\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^{-4}-2\left(\dfrac{2}{1-x}\right)^{2}-8=0$.

204 Решите уравнения:

а) $(2x^2-5)^{\frac{5}{3}}=32$; б) $\left(x^2-3|x|-1\right)^{2,5}=243$; в) $(x+5)^{\frac{11}{5}}=-2$.

П **205** В арифметической прогрессии 38, 33, 28, ... найдите сумму всех ее положительных членов.

206 Найдите пятый член арифметической прогрессии, если ее первый член равен $2\sqrt{5}-3$, а третий равен $4-2\sqrt{5}$.

207 При каком m числа $5m+4$; $(m+2)^2$; $-3m$ являются последовательными членами арифметической прогрессии (x_n)?

208 Постройте графики функций в одной системе координат:

а) $y=x^{-2}$ и $y=x^{-3}$; б) $y=x^{-\frac{1}{2}}$ и $y=x^{-\frac{1}{3}}$.

С помощью графиков определите для каждой функции:

1) область определения;
2) интервалы знакопостоянства;
3) промежутки возрастания и убывания;
4) наибольшее и наименьшее значения функции;
5) четность функции;
6) множество значений функции.

Д **209** Решите уравнения:

а) $\left(\left(\dfrac{x}{2}\right)^{-2}+3\right)^{-1}=0,25$; б) $23x-x^{-1}=0,4$; в) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{4}+\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^{-2}-20=0$.

210 Решите уравнения:

а) $(3x^3+11)^{\frac{3}{2}}=27$; б) $\left(2x^2+5|x|+5\right)^{\frac{5}{3}}=32$; в) $(3x-2)^{\frac{2}{13}}=-1$.

211 В арифметической прогрессии $-43, -37, -31$, ... найдите сумму всех ее отрицательных членов.

212 При каком n числа $6n+13$; $(n-2)^2$; $27-2n$ являются последовательными членами арифметической прогрессии (x_n)?

213 Постройте графики функций в одной системе координат:

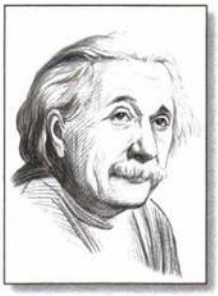
а) $y=x^2$ и $y=x^3$; б) $y=x^{\frac{1}{2}}$ и $y=x^{\frac{1}{3}}$.

С помощью построенного графика проведите исследование каждой функции по известному вам плану. Укажите, какая из функций является четной, какая – нечетной (ни той, ни другой).

С **214*** Дана последовательность чисел такая, что $x_1=1234$, $x_{n+1}=1-\dfrac{1}{x_n}$. Найдите x_{1000}.

§ 4. Решение уравнений и неравенств высших степеней

1. Решение уравнений высших степеней



Мне приходится делить время между политикой и уравнениями. Однако уравнения, по-моему, важнее. Политика только для данного момента, а уравнения будут существовать вечно.

А. Эйнштейн (1879–1955),
немецко-швейцарско-американский физик

Среди известных нам уравнений мы выделяли линейные, квадратные, биквадратные. В этом пункте мы обобщим имеющиеся у нас знания об этих уравнениях, а также выявим новые способы решения уравнений.

Запишем хорошо знакомые нам линейное и квадратное уравнения в общем виде:

$a_0x + a_1 = 0;$
$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0.$

Можно видеть, что они являются частным случаем уравнения n-й степени $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$. При $n = 1$ получаем линейное уравнение, при $n = 2$ – квадратное уравнение. Тогда, например, знакомое нам биквадратное уравнение является неполным уравнением четвертой степени $a_0x^4 + a_2x^2 + a_4 = 0$ (с нулевыми коэффициентами при x^3 и x). Введем следующее определение.

Определение 1. **Уравнением *n*-й степени** ($n \in N$) называется уравнение вида $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \boldsymbol{R}$, $a_0 \neq 0$.

Если квадратное уравнение умели решать еще древние греки (тогда не было буквенных обозначений, и процесс решения описывался довольно сложно), то формулы для корней уравнения 3-й и 4-й степени (точнее, аналогичные им описания) появились только в XV–XVI веках. Формула для решений кубического уравнения обычно называется формулой Кардано (по имени итальянского математика XVI века), но она была известна и раньше (дель Ферро, Тарталья). Формулу для решения уравнения 4-й степени связывают с именем Феррари. После этого почти триста лет многие математики пытались найти аналогичные формулы для уравнения пятой и более высоких степеней, но в начале XIX века норвежский математик Абель установил, что такие формулы получить невозможно. Более того, существуют уравнения пятой степени с целыми коэффициентами, корни которых вообще не выражаются через радикалы (корни различных степеней из целых чисел).

Каким же тогда образом решать уравнения степени выше двух? Существуют ли уравнения, которые можно решить без использования формул? И если существуют, то как их решать? С этими вопросами мы и будем разбираться в этом пункте.

Рассмотрим для начала простейшие уравнения третьей и четвертой степени.

Пример 1. Решить уравнения:

а) $8x^3 = 27$; б) $-2x^3 = 16$; в) $x^4 - 64 = 0$; г) $2x^4 + 3 = 0$.

Решение.

а) $8x^3 = 27 \Leftrightarrow x^3 = \frac{27}{8} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

Ответ: 1,5.

б) $-2x^3 = 16 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x = -2$.

Ответ: -2.

в) $x^4 - 64 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 64 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{64}$.

Так как $64 = 2^6$, то $\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{2^6} = 2^{\frac{6}{4}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

$x = \pm\sqrt[4]{64} \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$.

Ответ: $\pm 2\sqrt{2}$.

г) $2x^4 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^4 = -\frac{3}{2}$.

Но $x^4 \geqslant 0$ для любого $x \in \boldsymbol{R}$, поэтому уравнение не имеет корней.

Ответ: $\varnothing$.

Итак, первый вывод, который мы можем сделать, касается **неполных уравнений n-й степени вида** $a_0x^n + a_1 = 0$, $a_0 \neq 0$.

Чтобы их решить, нужно:

1. Свести уравнение $a_0x^n + a_1 = 0$ к виду $x^n = a$.

2. Решить уравнение $x^n = a$, используя понятие корня n-й степени:

- в случае нечетного натурального n уравнение $x^n = a$ имеет корень $x = \sqrt[n]{a}$;
- в случае четного натурального n уравнение $x^n = a$ при $a > 0$ имеет 2 корня — $x = \pm\sqrt[n]{a}$, при $a = 0$ — один корень $x = 0$, при $a < 0$ не имеет корней.

Заметим, что некоторые из этих уравнений можно решить разложением на множители, так, например, уравнение $x^4 - 64 = 0$ можно было решить иначе:

$$x^4 - 64 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 8)(x^2 + 8) = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{8})(x + \sqrt{8})(x^2 + 8) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}.$$

Рассмотрим решение еще одного неполного уравнения четвертой степени.

Пример 2. Решить уравнение $x^4 + 2x^2 - 8 = 0$.

Решение.

Это уравнение является хорошо знакомым нам биквадратным уравнением. Сделав замену $x^2 = t$ ($t \geqslant 0$), получим квадратное уравнение $t^2 + 2t - 8 = 0$.

Это уравнение имеет два корня $t_1 = 2$, $t_2 = -4$. Так как $t \geqslant 0$, то значение $t = -4$ не подходит. Вернувшись к «старому» неизвестному, имеем $x^2 = 2$, откуда $x = \pm\sqrt{2}$.

Ответ: $\{\sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$.

Итак, **при решении биквадратных уравнений** вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $a \neq 0$, мы используем метод, известный нам из курса 8 класса. Заменой $x^2 = t$ (при этом $t \geqslant 0$) уравнение приводится к виду $at^2 + bt + c = 0$, то есть к квадратному уравнению. Количество корней биквадратного уравнения может меняться от 0 до 4 в зависимости от количества корней полученного в результате замены квадратного уравнения и их знаков.

Мы изучили решение биквадратных уравнений в 8 классе, поэтому подробно останавливаться на них не будем. Разберем примеры, когда уравнение высших степеней сводится к квадратному заменой чуть более сложной, чем $t = x^2$.

Пример 3. Решить уравнение $(x^2 - 5x + 2)(x^2 - 5x - 1) = 28$.

Решение.

Сделаем замену $x^2 - 5x = t$.

Уравнение приводится к виду $(t + 2)(t - 1) = 28$, то есть $t^2 + t - 30 = 0$. Полученное квадратное уравнение имеет 2 корня: $t_1 = 5$, $t_2 = -6$.

Вернемся к «старому» неизвестному.

Если $t = x^2 - 5x = 5$, то получим квадратное уравнение $x^2 - 5x - 5 = 0$, которое имеет корни $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{45}}{2}$.

Если $t = x^2 - 5x = -6$, то получим квадратное уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$, которое имеет 2 корня: $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.

Ответ: $\left\{\dfrac{5+3\sqrt{5}}{2}; \dfrac{5-3\sqrt{5}}{2}; 2; 3\right\}$.

Попытаемся решить с помощью замены неизвестного еще одно уравнение.

Пример 4. Решить уравнение $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$.

Решение.

Проанализируем уравнение: первые два и последние два члена имеют схожие коэффициенты, но пока определить выражение для замены не получается.

Попробуем преобразовать уравнение. Так как $x = 0$ не является решением уравнения, то разделим обе части уравнения на x^2. Получим:

$$x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{1}{x^2} - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0.$$

Теперь замену сделать можно. Пусть $x + \dfrac{1}{x} = t$, тогда $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2$. Получим уравнение $t^2 - 2 - 5t + 8 = 0$, то есть $t^2 - 5t + 6 = 0$.

Полученное квадратное уравнение имеет корни: $t_1 = 2$, $t_2 = 3$.

Вернувшись к «старому» неизвестному, получим два уравнения $x + \dfrac{1}{x} = 2$ и $x + \dfrac{1}{x} = 3$.

Уравнение $x + \dfrac{1}{x} = 2$, приводится к квадратному уравнению $x^2 - 2x + 1 = 0$, которое имеет единственный корень $x = 1$. Уравнение $x + \dfrac{1}{x} = 3$ приводится к квадратному уравнению $x^2 - 3x + 1 = 0$, которое имеет 2 корня — $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\left\{1; \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Итак, данное уравнение четвертой степени удалось решить с помощью замены, однако для этого потребовалась преобразовать его в дробно-рациональное. Обратим внимание на коэффициенты этого уравнения: коэффициенты многочлена $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1$, «равноудаленные» от его «начала» и «конца», равны. Такие уравнения имеют специальное название.

Определение 2. **Возвратным уравнением 4-го порядка** называется уравнение $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, где $a \neq 0$.

Выясним, можно ли способ решения, использованный нами в примере 4, применить для всех возвратных уравнений.

Так как $a \neq 0$, то число $x = 0$ не является корнем уравнения, и деление обеих частей уравнения на x^2 будет равносильным преобразованием. Получим:

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0.$$

Сделав замену $x+\frac{1}{x}=t$ (тогда $t^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$, то есть $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$), получим квадратное уравнение $at^2 + bt + c - 2a = 0$. Если t_0 – корень этого уравнения, то для нахождения соответствующих значений x нужно решить уравнение $x+\frac{1}{x}=t_0$, то есть опять-таки квадратное уравнение $x^2 - t_0x + 1 = 0$. Таким образом, решение любого возвратного уравнения 4-й степени сводится, вообще говоря, к решению трех квадратных уравнений.

Итак, для **решения возвратного уравнения четвертой степени нужно:**

1. Разделить обе части уравнения на x^2. Записать полученное уравнение в виде: $a\left(x+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$.

2. Сделать замену $x+\frac{1}{x}=t$ (тогда $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$).

3. Решить полученное квадратное уравнение. Если в результате его решения получен корень t_0, то перейти к пункту 4. Иначе записать ответ: «нет корней».

4. Вернуться к «старому» неизвестному и решить уравнение (уравнения) вида $x+\frac{1}{x}=t_0$.

5. Записать ответ.

Вспомним еще один способ, который помогал нам решать уравнения.

Пример 5. Решить уравнения:

а) $x^3 - 3x + 2 = 0$; б) $x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 1 = 0$.

Решение.

В правой части обоих уравнений стоит нуль, а левая раскладывается на множители. В таких случаях мы использовали следующий факт. Произведение равно нулю в том и только в том случае, когда хотя бы один из его множителей равен нулю.

а) Разложим левую часть уравнения на множители:

$x^3 - 3x + 2 = x^3 - x - 2x + 2 = x(x^2 - 1) - 2(x - 1) = x(x - 1)(x + 1) - 2(x - 1) =$
$= (x - 1)(x(x + 1) - 2) = (x - 1)(x^2 + x - 2)$.

Квадратный трехчлен $x^2 + x - 2$ имеет 2 корня: $x_2 = 1$, $x_2 = -2$, поэтому $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$. Тогда

$$x^3-3x+2=0 \;\Leftrightarrow\; (x-1)^2(x+2)=0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l}(x-1)^2=0\\ x+2=0\end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-2\end{array}\right..$$

Ответ: $\{1; -2\}$.

б) Разложим левую часть уравнения на множители:

$x^4-6x^3+9x^2-1=(x^2-3x)^2-1=(x^2-3x-1)(x^2-3x+1)$. Тогда

$$x^4-6x^3+9x^2-1=0 \iff (x^2-3x-1)(x^2-3x+1)=0 \iff \left[\begin{array}{l} x^2-3x-1=0 \\ x^2-3x+1=0 \end{array}\right..$$

Остается решить квадратные уравнения: $x^2-3x-1=0$ и $x^2-3x+1=0$.

Первое уравнение имеет корни: $x_1=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$, $x_2=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$.

Второе уравнение имеет корни: $x_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\left\{\dfrac{3+\sqrt{13}}{2};\dfrac{3-\sqrt{13}}{2};\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Итак, уравнение высокой степени $P(x)=0$ удается решить также в том случае, когда многочлен $P(x)$ в его левой части раскладывается на линейные и квадратичные множители («распадающееся уравнение»). Множеством корней исходного уравнения будет **объединение множеств корней всех образовавшихся линейных и квадратичных множителей.**

* * *

Иногда искомое разложение многочлена на линейные и квадратичные множители удается получить **методом неопределенных коэффициентов**.

Пример 6.

Решить уравнение $x^4+x^3-9x^2-2x+2=0$.

Решение.

Попробуем разложить многочлен 4-й степени в левой части уравнения в произведение двух квадратных трехчленов (естественно считать, что коэффициенты при x^2 обоих этих трехчленов равны 1):

$x^4+x^3-9x^2-2x+2=(x^2+ax+b)(x^2+px+q)$.

После раскрытия скобок правая часть примет вид:

$x^4+(a+p)x^3+(b+ap+q)x^2+(aq+bp)x+bq$.

Приравнивая коэффициенты при x^3, x^2, x и свободные члены, получим систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} a+p=1 \\ b+ap+q=-9 \\ aq+bp=-2 \\ bq=2 \end{cases}$$

Такая система, вообще говоря, приводится к уравнению более сложному (и даже более высокой степени), чем исходное. Поэтому в общем случае такой метод вряд ли полезен. Но в отдельных случаях удается из соображений делимости угадать некоторые из коэффициентов, а остальные легко найдутся. Например, в нашем конкретном примере, считая коэффициенты целыми, можно попробовать взять $b=1$, $q=2$ (всего существует 4 возможных целых пары (b, q), удовлетворяющих 4-му уравнению: $b=1$, $q=2$; $b=2$, $q=1$; $b=-1$, $q=-2$; $b=-2$, $q=-1$.)

Итак, рискнем взять $b=1$, $q=2$. Тогда $2a+p=-2$ (из третьего уравнения); так как $a+p=1$, то $a=-3$, $p=4$. Полученные числа по счастливой случайности удовлетворяют уравнению $b+ap+q=-9$. Итак, найдено одно из решений системы: $a=-3$, $p=4$, $b=1$, $q=2$, то есть $x^4+x^3-9x^2-2x+2=(x^2-3x+1)(x^2+4x+2)$.

Пытаться искать другие решения системы не имеет смысла. Остается решить квадратные уравнения

$x^2 - 3x + 1 = 0$ и $x^2 + 4x + 2 = 0$.

Ответ: $\left\{\frac{3+\sqrt{5}}{2}; -2+\sqrt{2}; -2-\sqrt{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

В заключение сформулируем общие рекомендации для решения уравнений высших степеней.

Уравнение третьей и более высоких степеней можно **решать сведением к уравнениям второй или первой степени.** Для этого используются два основных метода:

- замена неизвестного;
- разложение на множители.

К **215** Среди следующих уравнений:

а) $2x - 1 = 0$; в) $3x^4 + 8x^2 - 11 = 0$; д) $3x^5 + 96 = 0$;

б) $4x^2 + 4x + 1 = 0$; г) $x^3 - 125 = 0$; е) $x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 1 = 0$

1) укажите линейное уравнение; квадратное уравнение; биквадратное уравнение;

2) укажите те уравнения, для которых вам известны формулы вычисления корней;

3) укажите уравнения вида $a_0x^n + a_1 = 0$, $a_0 \neq 0$.

4) укажите уравнения, содержащие x в степени большей, чем 2.

Запишите все эти уравнения в общем виде. Как бы вы назвали это уравнение? Уточните название уравнения с помощью определения в учебнике.

216 Решите уравнения:

а) $x^3 - 125 = 0$; б) $3x^5 + 96 = 0$; в) $3x^4 + 8x^2 - 11 = 0$.

217 Решите уравнение $x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 1 = 0$. Сопоставьте его с ходом решения, изложенным на стр. 69 учебника.

218 Сделайте вывод о способах решения уравнений высших степеней и сопоставьте его с выводами, изложенными на стр. 70.

219 1) Сравните коэффициенты уравнения: $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$.
Что интересного вы замечаете? Подобные уравнения называют возвратными уравнениями четвертой степени. Запишите общий вид возвратного уравнения.

2) С помощью какого преобразования можно привести данное уравнение к виду:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0.$$

3) Решите это уравнение. Сопоставьте ход своего решения с решением, описанным на стр. 67. Можно ли обобщить использованный вами способ на все подобные уравнения? Составьте алгоритм решения возвратных уравнений и проверьте его правильность по учебнику.

220 Решите уравнения:

а) $0{,}125x^3 = 64$; б) $-3x^3 = 375$; в) $x^6 - 512 = 0$; г) $4x^4 + 4 = 0$.

221 Решите биквадратные уравнения:

а) $5x^4 - 6x^2 + 1 = 0$; в) $3x^4 + 5x^2 - 2 = 0$; д) $3x^4 - 8x^2 = 0$;

б) $3x^4 + 4x^2 + 1 = 0$; г) $x^4 + x^2 + 2 = 0$; е) $x^4 = 0$.

Сколько корней может иметь биквадратное уравнение, от чего это зависит?

222 Решите уравнения:

а) $(x - 2)^2 (x^2 - 4x) + 3 = 0$; б) $(x - 1)^4 - x^2 + 2x - 73 = 0$.

223 Решите возвратное уравнение $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$.

224 Решите уравнения, разложив левую часть на множители:

а) $x^3 + 5x^2 - x - 5 = 0$; б) $x^4 - x^2 - 6x - 9 = 0$.

П **225** Пусть первый член геометрической прогрессии $y_1 = 243$, знаменатель прогрессии $q = -\frac{2}{3}$. Найдите шестой член геометрической прогрессии и сумму первых шести ее членов.

226 Напишите формулу n-го члена и суммы n первых членов геометрической прогрессии (b_n), если $b_3 - b_2 = 12$ и $2b_3 + b_4 = 96$.

227 Решите уравнение:

$2(x^2 + x^{-2}) - 3(x + x^{-1}) = 1$.

228 Решите уравнения:

а) $2x^{\frac{1}{3}} - 3x^{\frac{1}{6}} + 1 = 0$ б) $x^2\sqrt{x} - 33\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x} + 32x^{-\frac{5}{6}} = 0$.

Д **229** Решите уравнения:

а) $0{,}01x^3 = 270$; б) $-5x^3 = 135$; в) $x^4 - 729 = 0$; г) $10x^{10} = -10$.

230 Решите биквадратные уравнения:

а) $25x^4 + 10x^2 + 1 = 0$; г) $x^4 + x^2 - 2 = 0$;

б) $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$; д) $5x^4 + 7x^2 = 0$;

в) $9x^4 - 12x^2 + 4 = 0$; е) $x^4 = -1$.

231 Решите уравнения:

а) $(x - 3)^2 (2x^2 - 12x) + 40 = 0$; б) $(x + 2)^4 + x^2 + 4x + 2 = 0$.

232 Решите возвратное уравнение $4x^4 + 20x^3 + 33x^2 + 20x + 4 = 0$.

233 Решите уравнения, разложив левую часть на множители:

а) $x^3 - 7x^2 + 3x - 21 = 0$; б) $4x^4 - 4x^3 + x^2 - 9 = 0$.

234 Пусть в геометрической прогрессии $y_1 = 90$, $y_4 = 3\frac{1}{3}$. Найдите знаменатель геометрической прогрессии и сумму первых четырех ее членов.

235 Напишите формулу n-го члена и суммы n первых членов геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = 8b_4$, $b_5 = \frac{3}{16}$.

236 Решите уравнение:

$3(x^2 + x^{-2}) + 2(x + x^{-1}) = 2$.

237 Решите уравнение:

а) $x^{\frac{2}{3}}-5x^{\frac{1}{3}}+4=0$; б) $x^{\frac{1}{15}}-8x^{\frac{3}{5}}=2\sqrt[3]{x}$.

C **238*** Сравните числа 51^{101} и $101!$.

2. Неравенства высших степеней: методы решения

Математика является учением об отношениях между формулами, лишенными какого бы то ни было содержания.

Д. Гильберт (1862–1943),
немецкий математик

В предыдущем пункте мы учились решать уравнения высших степеней, систематизируя имеющиеся у нас знания и открывая новые. Естественным будет наряду с решением уравнений высших степеней рассмотреть и решение аналогичных неравенств.

Основными доступными нам методами решения уравнений высших степеней является метод замены и разложения на множители. Как мы помним, разложение на множители помогает и при решении неравенств. С помощью этого преобразования мы представляем левую часть неравенства в виде произведения линейных и неприводимых квадратичных множителей, после чего решаем полученное неравенство методом интервалов.

Вспомним, как это происходит, разобрав решение следующего неравенства.

Пример 1.

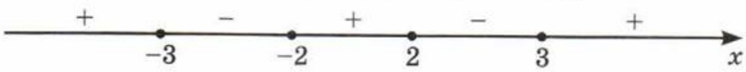
Решить неравенство $x^4-13x^2+36\leqslant 0$.

Решение.

Это неравенство четвертой степени. Разложим левую часть неравенства на множители, используя теорему, обратную теореме Виета, и формулу разности квадратов:

$x^4-13x^2+36=(x^2-4)(x^2-9)=(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$.

$x^4-13x^2+36\leqslant 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)(x-3)(x+3)\leqslant 0$



Выберем промежутки, которые удовлетворяют знаку неравенства, и запишем ответ.

Ответ: $x\in[-3;-2]\cup[2;3]$.

Оказывается, это неравенство можно было решить и с помощью замены. Рассмотрим этот способ решения.

Сделаем замену $x^2=t$ (при этом $t\geqslant 0$). В результате этой замены получим систему из квадратного неравенства $t^2-13t+36\leqslant 0$ и линейного неравенства $t\geqslant 0$.

Квадратный трехчлен $t^2-13t+36$ имеет два корня: $t_1=4$, $t_2=9$, поэтому решением квадратного неравенства является отрезок $[4; 9]$. Он удовлетворяет условию $t\geqslant 0$.

Можем описать это решение так:

$$\begin{cases} t^2-13t+36 \leqslant 0 \\ t \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-4)(t-9) \leqslant 0 \\ t \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in [4;9] \\ t \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \in [4;9].$$

Вернувшись к «старому» неизвестному, получим двойное неравенство: $4 \leqslant x^2 \leqslant 9$.

Его можно решить переходя к системе двух квадратных неравенств или следующим образом: $4 \leqslant x^2 \leqslant 9 \Leftrightarrow 2 \leqslant |x| \leqslant 3 \Leftrightarrow x \in [-3;-2] \cup [2;3]$.

Ответ: $x \in [-3;-2] \cup [2;3]$.

Решим еще одно неравенство с помощью замены.

Пример 2.

Решить неравенство $x^4 - x^2 + 1 > 0$.

Решение.

Сделаем замену $x^2 = t$ $(t \geqslant 0)$. В результате этой замены получится квадратное неравенство $t^2 - t + 1 > 0$.

Квадратный трехчлен $t^2 - t + 1$ не имеет корней, и решением квадратного неравенства является вся числовая прямая. В соответствии с условием, возникшим при замене: $t \geqslant 0$, выберем только неотрицательную ее часть.

Можем описать это решение так:

$$\begin{cases} t^2-t+1>0 \\ t \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in (-\infty;+\infty) \\ t \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \in [0;+\infty).$$

Вернувшись к «старому» неизвестному, получим $x^2 \geqslant 0$, это неравенство истинно при любых x.

Ответ: $x \in (-\infty; +\infty)$.

В рассмотренном нами примере замена неизвестного помогла избежать очень непростого разложения на множители:

$x^4 - x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 3x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{3}x)^2 = (x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1)$, которое нам пришлось бы проводить.

Итак, при решении неравенств высших степеней, так же как и при решении уравнений, применяются разложение на множители и замена неизвестного. После чего неравенство решается методом интервалов.

Заметим, что в отличие от уравнений при решении неравенств методом замены пользуются гораздо реже.

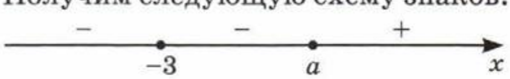
Теперь попробуем решить неравенство степени выше двух, содержащее параметр, например, неравенство третьей степени $(x - a)(x + 3)^2 \geqslant 0$.

Левая часть неравенства уже представлена в виде произведения. Значит, многочлен $(x - a)(x + 3)^2$ имеет два корня, один из которых задан параметром, а второй равен -3. Рассмотрим три случая расположения корней этого многочлена.

Если корни равны, то есть при $a = -3$, получим неравенство $(x + 3)^3 \geqslant 0$, решениями которого являются все числа $x \geqslant -3$.

Если число a лежит правее -3, то есть при $a > -3$, при переходе через точку a знак многочлена меняется, а при переходе через точку -3 знак не меняется.

Получим следующую схему знаков:



Выбирая промежутки и точки, которые удовлетворяют знаку неравенства, получим, что решениями неравенства являются $x = -3$ и все числа $x \geqslant a$.

Если число a лежит левее -3, то есть при $a < -3$, получим следующую схему знаков:

Решениями неравенства являются все числа $x \geqslant a$.

При записи ответа объединим первый и последний случаи в один.

Ответ: при $a \leqslant -3$ решением неравенство является $x \in [a; +\infty)$;
при $a > -3$ решением неравенство является $x \in \{-3\} \cup [a; +\infty)$.

Итак, при решении подобных неравенств с параметром необходимо рассмотреть все возможные случаи расположения корня, заданного параметром и числовых корней и, используя схему знаков, записать соответствующие решения.

Рассмотрим пример применения этого способа.

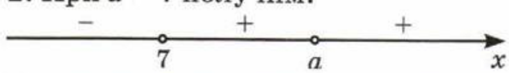
Пример 3.

Найти решение неравенства $(x - a)^2 (x - 7) > 0$ в зависимости от значения параметра a.

Решение.

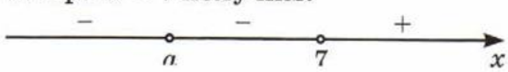
1. При $a = 7$ получим неравенство $(x - 7)^3 > 0$, решениями которого являются все числа $x > 7$.

2. При $a > 7$ получим:



Решениями неравенства являются все числа $x > 7$, $x \neq a$.

3. При $a < 7$ получим:



Решениями неравенства являются все числа $x > 7$.

Ответ: при $a \leqslant 7$ решением неравенства является $x \in (7; +\infty)$;
при $a > 7$ решением неравенства является $x \in (7; a) \cup (a; +\infty)$.

К **239** Решите неравенства методом интервалов:

а) $(x - 2)(x + 4) > 0$; б) $x^2(x + 1)(x - 6) < 0$.

240 1) Каким образом следует преобразовать левую часть неравенств, чтобы использовать метод интервалов?

а) $x^3 - 3x^2 - x + 3 < 0$; б) $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 12x > 0$.

2) Решите эти неравенства.

3) Какое общее преобразование используется при решении уравнений и неравенств высших степеней?

241 1) Сопоставьте биквадратное уравнение $x^4 - x^2 + 1 = 0$ и неравенство четвертой степени $x^4 - x^2 + 1 > 0$. Что интересного вы замечаете?

2) Попробуйте решить неравенство с помощью замены неизвестного.

Проверьте правильность своего решения, сопоставив его с решением, изложенным на стр. 73.

3) Решите это неравенство разложением на множители. Какой из способов показался вам более удобным?

4) Какое общее преобразование можно использовать при решении уравнений и неравенств высших степеней?

242 Решите неравенства:

а) $x^4 - 9x^2 + 20 \geqslant 0$; б) $x^4 + x^2 - 6 < 0$; в) $x^4 + 5x^2 + 7 > 0$.

243 Решите неравенства, разложив левую часть на множители:

а) $x^3-3x-2 \geqslant 0$; б) $\dfrac{x^3-2x-4}{x^2-7x+12} \leqslant 0$; в) $\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3-8} > 0$.

244 Найдите решение неравенства $(x-a)^2(x-1) \leqslant 0$ в зависимости от значения параметра a.

П **245** В геометрической прогрессии (y_n) найдите число n и n-й член данной прогрессии, если первый член $y_1 = 6$, знаменатель $q = -2$, а сумма n первых ее членов $S_n = -510$.

246 При каких значениях y числа $2y$, $5-y$, $7+y$, $20-4y$ являются четырьмя последовательными членами геометрической прогрессии?

247 Решите уравнения:

а) $0{,}064\,x^3 = -27$; в) $5x^8 + 5 = 0$;

б) $x^5 + \dfrac{1}{243} = 0$; г) $9\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{6}\right)^4 + 14\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{6}\right)^2 - 8 = 0$.

248 Решите уравнение методом замены:

$$\frac{x^2-10x+13}{x^2-6x+13} = \frac{3x}{x^2-8x+13}.$$

249 Решите возвратное уравнение:

$6x^4 - 13x^3 + 12x^2 - 13x + 6 = 0$.

250 Решите уравнения, разложив левую часть на множители:

а) $x^3 - 19x - 30 = 0$; б) $x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 24x - 24 = 0$.

Д **251** Решите неравенства:

а) $x^4 + 4x^2 - 5 > 0$; б) $x^4 - 11x^2 + 18 \leqslant 0$; в) $2x^4 - 3x^2 + 2 < 0$.

252 Решите неравенства, разложив левую часть на множители:

а) $x^3 + 3x^2 - x - 3 < 0$; б) $\dfrac{x^3-3x+4}{x^2+4x+3} > 0$; в) $\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^3-3x^2+3x-1} \geqslant 0$.

253* Найдите решение неравенства $(x-a)(x^2-1) \geqslant 0$ в зависимости от значения параметра a.

254 В геометрической прогрессии (y_n) найдите число n и n-й член данной прогрессии, если первый член $y_1 = 3$, знаменатель $q = 2$, а сумма n первых ее членов $S_n = 93$.

255 При каких значениях k числа $2k-1$, $2k+1$, $9k$, $k+26$ являются четырьмя последовательными членами геометрической прогрессии?

256 Решите уравнения:

а) $-343\,x^3 = 8$; б) $x^4 - \dfrac{1}{1296} = 0$; в) $4\left(2x-\dfrac{1}{6}\right)^4 + 7\left(2x-\dfrac{1}{6}\right)^2 - 2 = 0$.

257 Решите возвратное уравнение:

$3x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 8x + 3 = 0$.

258 Решите уравнения, разложив левую часть на множители:

а) $x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = 0$; б) $x^3 + x - 2 = 0$.

С **259*** Докажите, что при любом a имеет место неравенство:

$3\,(1 + a^2 + a^4) \geqslant (1 + a + a^2)^2$.

3*. Деление многочленов и теорема Безу. Схема Горнера

Весь смысл жизни заключается в бесконечном завоевании неизвестного, в вечном усилии познать больше.

Э. Золя (1840–1902),
французский писатель

В 8 классе мы научились делить многочлен на многочлен. При этом, как и при делении целых чисел, мы рассматривали деление нацело ($P(x) \vdots Q(x) \Leftrightarrow P(x) = C(x)\,Q(x)$) и деление с остатком ($P(x) = C(x)\,Q(x) + R(x)$). В этом пункте мы расширим свои знания о делении многочленов. Но для начала вспомним, как мы выполняли деление.

Пример 1.

Произвести деление многочлена $x^3 - 3x - 2$ в столбик:

а) на $x - 3$; б) на $x - 2$.

Решение.

а)
$$
\begin{array}{rrrr|l}
-\,x^3 & & -3x & -2 & x-3 \\
\cline{5-5}
x^3 & -3x^2 & & & x^2+3x+6 = C(x) \\
\cline{1-4}
 & -\,3x^2 & -3x & -2 & \\
 & 3x^2 & -9x & & \\
\cline{2-4}
 & & -\,6x & -2 & \\
 & & 6x & -18 & \\
\cline{3-4}
 & & & 16 = R(x) &
\end{array}
$$

б)
$$
\begin{array}{rrrr|l}
-\,x^3 & & -3x & -2 & x-2 \\
\cline{5-5}
x^3 & -2x^2 & & & x^2+2x+1 = C(x) \\
\cline{1-4}
 & -\,2x^2 & -3x & -2 & \\
 & 2x^2 & -4x & & \\
\cline{2-4}
 & & -\,x & -2 & \\
 & & x & -2 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 = R(x) &
\end{array}
$$

При делении на $x - 3$ неполное частное равно $x^2 + 3x + 6$, остаток равен 16.

При делении на $x - 2$ частное равно $x^2 + 2x + 1$, остаток равен 0. Многочлен $x^3 - 3x - 2$ делится на многочлен $x - 2$ без остатка.

Оказывается, в некоторых случаях остаток от деления многочленов можно найти и без выполнения деления. Рассмотрим теорему.

Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $P(x)$ на линейное выражение $x - \alpha$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$, равен $P(\alpha)$, то есть значению многочлена $P(x)$ при $x = \alpha$.

Доказательство.

Так как степень многочлена $x - \alpha$ равна 1, а степень остатка должна быть меньше, то есть остаток является некоторым числом r (многочлен степени 0). Тогда при всех $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство $P(x) = q(x)\,(x - \alpha) + r$, где $q(x)$ – неполное частное. Это равенство должно выполняться, в частности, при $x = \alpha$, то есть $P(\alpha) = q(\alpha) \cdot 0 + r$.

Итак, $r = P(\alpha)$. ■

Таким образом, остаток от деления многочлена $P(x)$ на линейное выражение $x - \alpha$ вычисляется непосредственной подстановкой числа α в многочлен $P(x)$ вместо x.

Применим теорему Безу к рассмотренному выше примеру. Остаток от деления $x^3 - 3x - 2$ на $x - 3$ равен $r = P(3) = 3^3 - 3 \cdot 3 - 2 = 16$. Остаток от деления $x^3 - 3x - 2$ на $x - 2$ равен $r = P(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 - 2 = 0$.

Можем сформулировать следующее правило.

Чтобы найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на линейное выражение $x - \alpha$, нужно вычислить значение этого многочлена при $x = \alpha$.

* * *

Кроме того, для нахождения неполного частого и остатка от деления $P(x)$ на линейное выражение $x - \alpha$ можно применять так называемую схему Горнера.

Рассмотрим деление многочлена $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$ степени n на линейное выражение $x - \alpha$. Пусть неполное частное от деления многочленов есть многочлен $q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + ... + b_{n-3}x^2 + b_{n-2}x + b_{n-1}$ степени $n-1$, а остаток r для удобства обозначим b_n.

Тогда $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n =$
$= (b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + ... + b_{n-3}x^2 + b_{n-2}x + b_{n-1})(x - \alpha) + b_n$.

Раскрывая скобки в правой части полученного равенства, имеем:

$$b_0x^n + (b_1 - \alpha b_0)x^{n-1} + (b_2 - \alpha b_1)x^{n-2} + ... + (b_{n-1} - \alpha b_{n-2})x + (b_n - \alpha b_{n-1}).$$

Так как этот многочлен степени n совпадает с делимым $P(x)$, то, приравнивая коэффициенты при x^n, x^{n-1},..., x и свободные члены, получим:

$$b_0 = a_0,\ b_1 - \alpha b_0 = a_1,\ b_2 - \alpha b_1 = a_2,\ ...\ ,\ b_{n-1} - \alpha b_{n-2} = a_{n-1},\ b_n - \alpha b_{n-1} = a_n,$$

откуда получим окончательные **формулы для нахождения коэффициентов $b_0, b_1, ..., b_n$:**

$$\boldsymbol{b_0 = a_0,\ b_1 = a_1 + \alpha b_0,\ b_2 = a_2 + \alpha b_1,\ ...\ ,\ b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha b_{n-2},\ b_n = a_n + \alpha b_{n-1}.}$$

Если коэффициенты $a_0, a_1, ..., a_n$ известны, то эти формулы рекуррентно задают последовательность $b_0, ..., b_n$ (мы задавали в главе III рекуррентно бесконечные числовые последовательности, а здесь последовательность конечна). Начальный член b_0 задан (равен a_0), а каждый последующий член b_k выражается через b_{k-1} и члены известной последовательности $a_0, a_1, ..., a_n$: $b_k = a_k + \alpha b_{k-1}$, $k = 1, 2, ..., n$.

Этот процесс удобно записывать в виде таблицы:

a_0	a_1 +	a_2	....	a_n
b_0	$\alpha \cdot b_1$	b_2	....	b_n

где каждый b_k при $k \geqslant 1$ получается сложением стоящего над ним a_k с произведением α на стоящий слева от него b_{k-1}.

Выполним деление многочленов из примера 1 с использованием схемы Горнера.

Решение.

а) Разделим с остатком $x^3 - 3x - 2$ на $x - 3$ (здесь $\alpha = 3$):

1 +	0	–3	–2
$3 \cdot 1$	3	6	16

Получили тот же результат: неполное частное равно $x^2 + 3x + 6$, остаток равен 16.

б) Разделим с остатком $x^3 - 3x - 2$ на $x - 2$ (здесь $\alpha = 2$):

1 +	0	–3	–2
$2 \cdot 1$	2	1	0

Получили тот же результат: неполное частное равно $x^2 + 2x + 1$, остаток равен 0.

К **260** 1) Разделите в столбик многочлен $x^3 - 2x^2 - 9x + 7$ на
а) двучлен $x - 4$; б) на двучлен $x - 1$.
Чему равны остатки от деления?

2) Найдите значение многочлена $x^3 - 2x^2 - 9x + 7$ при $x = 4$, при $x = 1$. Сопоставьте полученные значения с остатками от деления пункта 1. Что интересного вы замечаете?

3) Проведите подобные вычисления для каких-нибудь произвольных многочлена и двучлена вида $x - \alpha$.

4) Сформулируйте гипотезу о способе нахождения остатка от деления многочленов. Сопоставьте свое предположение с теоремой Безу.

261 Разделите в столбик многочлен $x^3 - 5x + 2$ на:
а) $x - 5$; б) $x - 2$; в) $x^2 + 1$; г) $x^2 + 2x + 2$; д) $x^3 - 3x^2 + 2x - 1$.

262 Найдите остаток от деления многочлена $x^5 - 3x^3 - 3x + 5$ на:
а) $x - 3$; б) $x - 2$; в) $x - 1$; г) $x + 1$; д) $x + 2$; е) $x + 3$.

263 При каком значении параметра a многочлен $P(x) = x^{20} + ax^3 + 5$ делится на $x - 1$?

П **264** Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии (y_n), если $y_1 = 45$, $q = -\frac{1}{4}$.

265 Четвертый член геометрической прогрессии равен 24, а девятый – 768. Найдите пятый член этой прогрессии.

266 При каком m числа $m - 3$; $\sqrt{5m}$; $m + 16$ являются последовательными членами геометрической прогрессии?

267 Решите неравенства:
а) $x^4 - 14x^2 + 45 \geqslant 0$; б) $x^4 + 2x^2 - 24 < 0$; в) $x^4 + 8x^2 + 18 > 0$.

268 Решите неравенства, разложив левую часть на множители:
а) $x^3 - x^2 + x - 1 \leqslant 0$; в) $\dfrac{x^4 - 2x^2 - 8}{x^2 - 4x - 5} \leqslant 0$;
б) $x^3 + 5x - 6 > 0$; г) $\dfrac{(x^3 - 8)(x^2 - 6x - 7)}{(3x - 2x^2 - 4)(3x^2 - 10x + 3)} \leqslant 0$.

Д **269** Разделите в столбик многочлен $x^3 - x^2 + 2$ на:
а) $x - 1$; б) $x + 1$; в) $x^2 - 1$; г) $x^2 - x + 2$; д) $x^3 - 2x^2 + 2x - 1$.

270 Найдите остаток от деления многочлена $x^5 - 5x^3 - x + 8$ на:
а) $x - 3$; б) $x - 2$; в) $x - 1$; г) $x + 1$; д) $x + 2$; е) $x + 3$.

271 При каком значении параметра a многочлен $P(x) = 2x^{13} - ax^2 + 5x$ делится на $x + 1$?

272 Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии (y_n), если $y_2 = 7$, $q = \frac{1}{3}$.

273 Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если $b_3 + b_4 = 2\,(b_4 + b_5)$.

274 При каком s числа $s-2$; $\sqrt{6s}$; $s+5$ являются последовательными членами геометрической прогрессии?

275 Решите неравенства:

а) $x^4-13x^2+36\leqslant 0$; б) $x^4+2x^2-24>0$; в) $x^4+5x^2+15<0$.

276 Решите неравенства, разложив левую часть на множители:

а) $(x^2+2x-15)(x^2-4x+3)(x-1)\leqslant 0$; б) $\dfrac{(x^3-27)(x^2+7x+10)}{(x^3+1)(2x+3-x^2)}\leqslant 0$.

C **277***. Многочлен $P(x)$ дает остаток 3 при делении на $x-1$ и остаток 2 при делении на $x-2$. Какой остаток дает $P(x)$ при делении на многочлен $(x-1)(x-2)$?

4*. Еще один способ решения уравнений высших степеней

Умственный труд на уроках математики – пробный камень мышления.

В.А.Сухомлинский (1918–1970), советский педагог-новатор

Во втором пункте этой главы мы выявили, что основным способом решения уравнений высших степеней является сведение их к уравнениям более низкой степени, для этого мы использовали замену или разложение на множители. Теперь, доказав теорему Безу, мы готовы выявить еще один способ разложения многочлена на множители, который поможет нам в решении уравнений высших степеней.

Воспользуемся теоремой Безу для доказательства следующей теоремы.

Теорема (следствие из теоремы Безу). Число $\alpha\in\boldsymbol{R}$ является корнем многочлена $P(x)$ степени $n\geqslant 1$ в том и только в том случае, когда $P(x)\vdots(x-\alpha)$.

Доказательство.

Число α является корнем $P(x)\Leftrightarrow P(\alpha)=0$. Но $P(\alpha)$ – это остаток от деления $P(x)$ на α. Поэтому $P(\alpha)=0\Leftrightarrow P(x)\vdots(x-\alpha)$. ■

Эта теорема помогает разложить многочлен на множители. Зная его корень, мы можем разделить многочлен на соответствующий двучлен и представить его в виде произведения делителя и частного.

Применим эту теорему для решения уравнения высших степеней. Рассмотрим, например, уравнение $x^4-5x^2+10x-6=0$.

Заметим, что сумма коэффициентов равна нулю, значит, корнем уравнения будет единица (т.к. при подстановке единицы мы получим $1-5+10-6=0$). Так как корнем многочлена является число 1, то по следствию теоремы Безу многочлен 4-й степени в левой части уравнения делится нацело на $x-1$.

Разделив в столбик многочлен $x^4-5x^2+10x-6$ на $x-1$, получим в частном многочлен x^3+x^2-4x+6. Тогда исходное уравнение можно записать в виде:

$$x^4-5x^2+10x-6=0\Leftrightarrow(x-1)(x^3+x^2-4x+6)=0.$$

Попробуем применить эту же идею еще раз, теперь уже для кубического многочлена $x^3 + x^2 - 4x + 6$. Можно выявить, что его корнем является число $\alpha_2 = -3$ (это не так легко заметить, тем не менее $-27 + 9 + 12 + 6 = 0$). Разделив этот многочлен на $x + 3$, получим в частном многочлен $x^2 - 2x + 2$.

Исходное уравнение примет вид $(x - 1)(x + 3)(x^2 - 2x + 2) = 0$.

Квадратный трехчлен $x^2 - 2x + 2$ не имеет корней ($D < 0$). Исходное уравнение имеет два корня: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$.

Можем записать ответ.

Ответ: $\{1; -3\}$.

Ясно, что таким же образом можно решать и другие уравнения высших степеней, сложность будет заключаться только в подборе корня многочленов, получающихся после каждого деления. Этот метод решения уравнений высокого порядка часто называют методом **понижения порядка уравнения**, потому что с каждым угаданным нами корнем мы переходим к уравнению, степень которого на 1 меньше степени предыдущего уравнения.

Можем записать следующий способ решения уравнений высших степеней.

Чтобы решить уравнение $P(x) = 0$, где $P(x)$ – многочлен степени n, можно **понизить его порядок**, для этого нужно:

1. По возможности угадать один из корней α_1 многочлена $P(x)$.

2. Разделить многочлен $P(x)$ на двучлен $x - \alpha_1$.

3. Представить исходное уравнение в виде $(x - \alpha_1) P_1(x) = 0$, где $P_1(x)$ – частное от деления $P(x)$ на $(x - \alpha_1)$.

4. По возможности угадать один из корней α_2 многочлена $P_1(x)$.

5. Разделить многочлен $P_1(x)$ на $(x - \alpha_2)$.

6. Представить исходное уравнение в виде $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) P_2(x) = 0$, где $P_2(x)$ – частное от деления $P_1(x)$ на $(x - \alpha_2)$.

7. По возможности повторять шаги 4 – 6 для каждого полученного описанным образом многочлена пока не удастся дойти до многочлена $P_k(x)$ такого, что решить уравнение $P_k(x) = 0$ не представляет труда (например, если $P_k(x)$ – квадратный трехчлен или если заведомо $P_k(x) \neq 0$ при всех x).

Рассмотрим пример применения этого метода.

Пример 1.

Решить уравнение $2x^4 - 4x^3 - x^2 + 4x - 1 = 0$.

Решение.

1. Очевидным корнем уравнения является число $x_1 = 1$ $(2 - 4 - 1 + 4 - 1 = 0)$.

2. Разделим многочлен 4-й степени в левой части уравнения на $(x - 1)$, получим в частном $2x^3 - 2x^2 - 3x + 1$.

3. $2x^4 - 4x^3 - x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(2x^3 - 2x^2 - 3x + 1) = 0$.

4. Корнем кубического многочлена в левой части уравнения является число $x_2 = -1$ $(-2 - 2 + 3 + 1 = 0)$.

5. Разделим этот многочлен на $(x + 1)$, получим в частном $2x^2 - 4x + 1$.

6. $2x^4 - 4x^3 - x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(2x^2 - 4x + 1) = 0$.

7. Полученный квадратный трехчлен $2x^2 - 4x + 1$ имеет корни $x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{2}}{2} = 1 \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Исходное уравнение имеет 4 корня: $x_1 = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = 1-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

Ответ: $\left\{1+\frac{1}{\sqrt{2}}; 1-\frac{1}{\sqrt{2}}; 1; -1\right\}$.

Естественно возникает вопрос: как угадать какой-нибудь корень уравнения? Хорошо, если сумма коэффициентов многочлена равна 0; тогда корнем является число $x = 1$. Но угадать, например, корень $x = -3$ в уравнении $x^4 - 5x^2 + 10x - 6 = 0$ было не так просто.

* * *

Выясним, как же найти все рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами (а угадываются, как правило, рациональные или даже целые корни).

В пункте 4.1.5 было доказано, что если $r = \frac{m}{n}$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$ – несократимая дробь, являющаяся корнем многочлена $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ с целыми коэффициентами ($a_0 \neq 0$), то m – делитель свободного члена a_n, n – делитель старшего коэффициента a_0. Поэтому можно указать конечное (как правило, не очень большое) количество рациональных чисел, которые могут быть корнями уравнения, затем все их проверить. В частности, если $a_0 = 1$, то рациональные корни уравнения могут быть только целыми (делители свободного члена a_n).

Так, корни уравнения $x^4 - 5x^2 + 10x - 6 = 0$ могут быть только целыми: ±1, ±2, ±3, ±6 (делители числа (-6)). Непосредственная проверка показывает, что корнями являются числа 1 и -3, остальные не подходят, в чем мы и убедились ранее.

Для поиска рациональных корней многочлена $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + + a_{n-1}x + a_n$ с целыми коэффициентами ($a_0 \neq 0$) **можно использовать следующие «подсказки»:**

1. если $a_0 = 1$, то корни следует искать среди целых делителей числа a_n;

2. если $a_0 \neq 1$, то корни следует искать среди чисел $\frac{m}{n}$, где m – целый делитель a_n, n – натуральный делитель a_0.

Рассмотрим пример решения уравнений высших степеней с применением этих «подсказок» на этапе подбора корня многочлена.

Пример 2. Решить уравнения:

а) $2x^3 - 9x^2 + 11x - 3 = 0$; б) $x^4 - 8x^2 - 5x + 6 = 0$.

Решение.

а) Рациональные корни уравнения могут иметь вид несократимой дроби $r = \frac{m}{n}$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$, где m – делитель числа (-3), n – делитель числа 2, то есть возможные рациональные корни находятся среди чисел ±1, ±3, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$.

Непосредственная проверка показывает, что число $r = \frac{3}{2}$ подходит, оставшиеся числа можно не проверять, так как одного корня уже достаточно, чтобы решить уравнение, так как после деления кубического многочлена на линейный двучлен получится квадратный трехчлен.

Далее нам нужно разделить многочлен $2x^3 - 9x^2 + 11x - 3$ на двучлен $x - \frac{3}{2}$. Для удобства заменим делитель $x-\frac{3}{2}$ на двучлен $2x-3$[4]. В частном получится квадратный трехчлен x^2-3x+1. Уравнение примет вид:

$$(2x-3)(x^2-3x+1)=0.$$

Квадратный трехчлен x^2-3x+1 имеет корни $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Исходное уравнение имеет 3 корня: $x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $x_3=\frac{3}{2}$.

Ответ: $\left\{\frac{3+\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3}{2}\right\}$.

б) Рациональные корни уравнения могут быть только целыми делителями числа 6, то есть возможные целые корни находятся среди чисел ±1, ±2, ±3, ±6. Непосредственная проверка показывает, что корнями являются числа 3 и -2, остальные не подходят. Значит, многочлен 4-й степени в левой части уравнения делится нацело на $(x-3)(x+2)=x^2-x-6$.

Разделим многочлен x^4-8x^2-5x+6 на многочлен x^2-x-6. В частном получим x^2+x-1.

Уравнение примет вид: $(x-3)(x+2)(x^2+x-1)=0$.

Квадратный трехчлен $x^2+x-1=0$ имеет корни $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Исходное уравнение имеет 4 корня: $x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x_3=3$, $x_4=-2$.

Ответ: $\left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; 3; -2\right\}$.

Если уравнение не имеет рациональных корней, то метод понижения порядка в таком виде, как правило, не работает.

К **278** 1) Найдите остаток от деления многочлена x^3+x^2-5x-2 на двучлен $x-2$ двумя способами. Что можно сказать об этих многочленах? Представьте многочлен x^3+x^2-5x-2 в виде произведения.

2) Является ли число 2 корнем уравнения $x^3+x^2-5x-2=0$?

3) Пользуясь результатами выполнения первых двух заданий, укажите способ, которым можно разложить многочлен на множители, зная один из его корней.

4) Примените этот вывод для решения уравнения $3x^2+412x-276=0$, если известно, что один из его корней равен -138. Проверьте найденный корень, решая квадратное уравнение по формуле корней.

279 1) Попытайтесь решить уравнение $2x^4-4x^3-x^2+4x-1=0$. Сопоставьте ход своего решения с решением этого уравнения на стр. 80–81. Можно ли применить использованный вами способ для других уравнений высших степеней?

2) Составьте правило, которое может помочь при решении подобных уравнений. Сопоставьте свой вариант с вариантом, изложенным на стр. 81.

[4] Покажем, что если $P(x)$ делится на $x-\alpha$, то $P(x)$ делится и на $k(x-\alpha)$ при любом ненулевом k. Действительно, если $P(x)=C(x)(x-\alpha)$, то $P(x)=\frac{C(x)}{k}\cdot k(x-\alpha)$, а значит, $P(x)$ делится на $k(x-\alpha)$.

280 Решите уравнения:

а) $x^3+7x^2+7x-15=0$; г) $x^3-x^2-16x+16=0$; ж) $x^3-x^2-9x+9=0$;

б) $x^3-4x^2-9x+36=0$; д) $x^3+5x^2+2x-8=0$; з) $x^3-4x^2+x+6=0$;

в) $x^3+5x^2+7x+3=0$; е) $x^3-6x^2+9x-4=0$; и) $x^3-7x^2+11x-5=0$.

П **281** Произведите деление многочлена:

а) $8x^3-6x^2+3x-5$; б) $-2x^5+x+1$

в столбик на $x-1$.

282 Найдите остаток от деления многочлена:

а) $x^4-x^3-7x^2+x+6$ на двучлен $(x-2)$;

б) $2x^3+10x^2+5x-8$ на двучлен $(x+4)$.

283 Представьте в виде многочлена стандартного вида:

а) $(c^3-d^3)(c^3+d^3)$; в) $(3-y)(9+6y+y^2)$; д) $(6z-t)^2$;

б) $(4k^4+5n^5)(4k^4-5n^5)$; г) $(2a+b)(4a^2-4ab+b^2)$; е) $(a^2+b)^3$.

284 Разложите на множители:

а) c^2-4d^2; б) $27x^3+y^6$; в) $9a^2b^2+30ab+25$; г) $4-(x^2-2x+1)$.

285 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}2x+y=1\\3x-7y=-24\end{cases}$; б) $\begin{cases}2x-3y=1\\6y-4x=-2\end{cases}$; в) $\begin{cases}2x+6y=3\\3x+9y=4\end{cases}$.

Д **286** Решите уравнения:

а) $x^3+6x^2+11x+6=0$; г) $x^3-6x^2+9x-4=0$; ж) $x^3-7x+6=0$;

б) $x^3-8x^2+19x-12=0$; д) $x^3+2x^2-25x-50=0$; з) $x^3+3x^2-4x-12=0$;

в) $x^3-6x^2+11x-6=0$; е) $x^3+x^2-17x+15=0$; и) $x^3+2x^2-16x-32=0$.

287 Произведите деление многочлена $x^3+5x^2+15x+11$ в столбик на $x+1$.

288 Найдите остаток от деления многочлена:

а) $x^4-x^3-13x^2+x+12$ на двучлен $(x+3)$;

б) x^3-3x^2-6x-5 на двучлен $(x-5)$.

289 Представьте в виде многочлена стандартного вида:

а) $(c-d^2)(c+d^2)$; в) $(1-2y)(1+2y+4y^2)$; д) $(z+6t)^2$;

б) $(3x^3-2y)(3x^3+2y)$; г) $(a^2+b)(a^4-2a^2b+b^2)$; е) $(a^4-2b)^3$.

290 Разложите на множители:

а) $9c^2-d^4$; б) $8x^3+y^3$; в) $81a^2+450ab+625b^2$; г) $9-(x^2+4x+4)$.

291 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}x-5y=3\\2x+4y=-8\end{cases}$; б) $\begin{cases}0{,}5x-2{,}25y=4\\9y-2x=-16\end{cases}$; в) $\begin{cases}6x-5y=4\\7{,}5y-9x=-12\end{cases}$.

С **292*** Верно ли, что многочлен $P(x)=(x+1)^6-x^6-2x-1$ делится на многочлен $Q(x)=x(x+1)(2x+1)$?

5.* Бином Ньютона. Общие формулы сокращенного умножения

...Подумаешь, бином Ньютона!
(Из романа «Мастер и Маргарита», 1940.)

М.А. Булгаков (1891–1940),
русский писатель, драматург,
театральный режиссер, актер

В предыдущем пункте мы увеличили свой арсенал по решению уравнений высших степеней при помощи деления многочленов. В этом пункте мы познакомимся еще с одним способом разложения на множители – вернее расширим хорошо знакомый нам способ разложения многочленов с помощью формул сокращенного умножения.

Из курса 7 класса нам известны следующие формулы:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$ $\quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$ $\quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b);$$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)\,;$ $\quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$

Эти формулы допускают обобщение на случай, когда вместо показателей 2 и 3 рассматриваются произвольные натуральные числа.

Начнем с двух формул – квадрата и куба суммы двух чисел (квадрат и куб разности получаются из них заменой b на $-b$ и специального интереса не представляют). Они являются частными случаями n-й степени суммы $(a+b)^n$ при $n = 2$ и $n = 3$. Рассмотрим четвертую степень суммы двух чисел.

Можно получить эту формулу с помощью формулы куба суммы. Для этого представим 4-ю степень в виде следующего произведения:

$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b) = a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + a^3b + $
$+ 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$

Как мы видим, здесь, так же как и при $n = 2$ и $n = 3$, показатели степени первого слагаемого с каждым следующим произведением уменьшаются от n до нуля, а показатели степени второго слагаемого увеличиваются с нуля до n. Мы уже знакомились в 7 классе с треугольником Паскаля, с помощью которого можно узнать полученные нами коэффициенты и без процедуры умножения.

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\ 1 \\ 1\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 3\ 1 \\ \underline{1\ 4\ 6\ 4\ 1} \\ 1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1 \\ 1\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ 1 \end{array}$$

Они записаны в четвертой строке треугольника. С помощью этого треугольника можно получить коэффициенты и любой другой суммы двух чисел в степени n.

Пример 1.

Применяя треугольник Паскаля, вывести формулы для $(a+b)^5$, $(a+b)^6$, $(a+b)^7$.

Решение.

Продолжим треугольник Паскаля:

$$\begin{array}{c} \ldots \\ 1\ 4\ 6\ 4\ 1 \\ 1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1 \\ 1\ 6\ 15\ 20\ 15\ 6\ 1 \\ 1\ 7\ 21\ 35\ 35\ 21\ 7\ 1 \end{array}$$

Отсюда $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$;

$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$;

$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$.

Заметим, что формулы n-й степени разности $a-b$ тоже можно получить с помощью этого треугольника: коэффициенты остаются теми же, только чередуются знаки, например:

$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$;

$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$.

* * *

Настало время разобраться с тем, как и откуда этот треугольник возникает. В этом нам помогут знания по комбинаторике.

Вспомним формулу числа сочетаний:

$C_n^k = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, где $n = 1, 2, \ldots$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Для символов, используемых нами в этой формуле, верно:

$C_n^0 = 1$, $C_n^2 = n$, $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$, $C_n^3 = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$, ..., $C_n^{n-1} = n$, $C_n^n = 1$.

Кроме того, выполняется свойство: $C_n^k = C_n^{n-k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

С учетом этих символов наши формулы сокращенного умножения перепишутся так:

$(a+b)^2 = C_2^0a^2 + C_2^1ab + C_2^2b^2$;

$(a+b)^3 = C_3^0a^3 + C_3^1a^2b + C_3^2ab^2 + C_3^3b^3$;

$(a+b)^4 = C_4^0a^4 + C_4^1a^3b + C_4^3ab^3 + C_4^4b^4$.

Этот список можно дополнить первой строкой: $(a+b)^1 = C_1^0a + C_1^1b$.

Здесь просматривается закономерность, а именно: при всех $n = 1, 2, \ldots$ имеет место равенство:

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-2}a^2b^{n-2} + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^nb^n. \qquad (1)$$

Эта формула называется **формулой бинома Ньютона** (точнее было бы сказать – формулой n-й степени бинома).

Ясно, что сумма $(a+b)^n$ является однородным многочленом степени n с двумя переменными a и b, то есть содержит $n+1$ слагаемое – одночлены a^n, $a^{n-1}b$, $a^{n-2}b^2$, ..., a^2b^{n-2}, ab^{n-1}, b^n степени n с некоторыми коэффициентами, которые оказываются равными C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n.

Прежде чем доказывать формулу бинома Ньютона, вспомним одно замечательное свойство «биномиальных коэффициентов C_n^k»:

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k,\ 1 \leqslant k \leqslant n. \qquad (2)$$

Благодаря этому свойству биномиальные коэффициенты и образуют так называемый треугольник Паскаля, в котором, как мы знаем, каждый элемент C_{n+1}^k, не лежащий на границе

$(1 \leqslant k \leqslant n)$, равен сумме элемента стоящего прямо над ним $\left(C_n^k\right)$ и элемента, стоящего на одну ступеньку выше и на одну ступеньку левее $\left(C_n^{k-1}\right)$. Это свойство легко доказать из формулы для C_n^k:

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}.$$

Левая часть последнего равенства преобразуется к виду

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right) = \frac{n!(n-k+1+k)}{(k-1)!k\cdot(n-k)!(n-k+1)} = \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}.$$

Нужное равенство доказано.

Докажем теперь формулу (1) бинома Ньютона методом математической индукции.

Доказательство.

1. При $n = 1$ имеем: $(a+b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b = a + b$; формула справедлива.

2. Пусть формула (1) верна для произвольных a, b при некотором фиксированном значении $n \in N$.

3. Докажем ее справедливость для следующего значения $n + 1$. Имеем:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = \left(C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n\right)(a+b) =$$

$$= C_n^0 a^{n+1} + C_n^1 a^n b + C_n^2 a^{n-1}b^2 + \ldots + C_n^{n-1}a^2b^{n-1} + C_n^n ab^n + C_n^0 a^n b + C_n^1 a^{n-1}b^2 + C_n^2 a^{n-2}b^3 + \ldots + C_n^{n-1}ab^n + C_n^n b^{n+1} =$$

$$= C_n^0 a^{n+1} + \left(C_n^1 + C_n^0\right)a^n b + \left(C_n^2 + C_n^1\right)a^{n-1}b^2 + \left(C_n^3 + C_n^2\right)a^{n-2}b^3 + \ldots + \left(C_n^{n-2} + C_n^{n-1}\right)a^2b^{n-1} + \left(C_n^{n-1} + C_n^n\right)ab^n + C_n^n b^{n+1}.$$

Но $C_n^0 = 1 = C_{n+1}^0$, $C_n^n = 1 = C_{n+1}^{n+1}$, а в силу формулы (2) $C_n^1 + C_n^0 = C_{n+1}^1$; $C_n^2 + C_n^1 = C_{n+1}^2$; $C_n^3 + C_n^2 = C_{n+1}^3$;...; $C_n^{n-2} + C_n^{n-1} = C_{n+1}^{n-1}$; $C_n^{n-1} + C_n^n = C_{n+1}^n$.

Поэтому $(a+b)^{n+1} = C_{n+1}^0 a^{n+1} + C_{n+1}^1 a^n b + C_{n+1}^2 a^{n-1}b^2 + C_{n+1}^3 a^{n-2}b^3 + \ldots + C_{n+1}^{n-1}a^2b^{n-1} + C_{n+1}^n ab^n + C_{n+1}^{n+1}b^{n+1}$.

Формула (1) доказана для следующего значения $n + 1$.

Методом математической индукции формула бинома Ньютона доказана для произвольного натурального n. ■

Формулы n-й степени разности $a - b$ естественно получается из формулы бинома Ньютона заменой b на $-b$; именно поэтому коэффициенты для степени разности остаются теми же, только чередуются знаки.

Пример 2. Применяя формулу бинома Ньютона, упростить выражения:

а) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n$;

б) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n$ (чередуются знаки);

в) $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2$.

Решение.

а) Имеем:

$(1+1)^n = C_n^0 \cdot 1^n + C_n^1 \cdot 1^{n-1} \cdot 1 + C_n^2 \cdot 1^{n-2} \cdot 1^2 + \ldots + C_n^{n-1} \cdot 1 \cdot 1^{n-1} + C_n^n \cdot 1^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$. Но $(1+1)^n = 2^n$, поэтому $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

б) Аналогично $(1-1)^n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n$, поэтому искомое выражение равно 0.

в) Рассмотрим выражение $(a + b)^{2n}$ как произведение $(a + b)^n \cdot (a + b)^n$. Тогда $(a+b)^{2n} = \left(C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n\right)\cdot\left(C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n\right)$.

После раскрытия скобок убедимся в том, что коэффициент при $a^n b^n$ равен

$$C_n^0 \cdot C_n^n + C_n^1 \cdot C_n^{n-1} + C_n^2 \cdot C_n^{n-2} + \ldots C_n^{n-1} \cdot C_n^1 + C_n^n \cdot C_n^0 = \left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \ldots \left(C_n^{n-1}\right)^2 + \left(C_n^n\right)^2.$$

С другой стороны, по формуле бинома Ньютона коэффициент при $a^n b^n$ в разложении $(a+b)^{2n}$ равен C_{2n}^n. Поэтому

$$\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n.$$

Пример 3. Найти наибольший коэффициент многочлена $(2x+1)^{10}$.

Решение.

По формуле бинома Ньютона

$(2x+1)^{10}=C_{10}^0\cdot(2x)^{10}+C_{10}^1\cdot(2x)^9\cdot1+\ldots+C_{10}^k\cdot(2x)^{10-k}\cdot1^k+\ldots+C_{10}^{10}\cdot1^{10}.$

Нужно найти наибольшее значение выражения $a_k=C_{10}^k\cdot2^{10-k}$ при $k=0,1,\ldots,10$.

Рассмотрим отношение $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ при $k=0,1,\ldots,9$. Имеем:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{C_{10}^{k+1}\cdot2^{10-k-1}}{C_{10}^k\cdot2^{10-k}}=\frac{10!}{(k+1)!(9-k)!}\cdot\frac{k!(10-k)!}{10!}\cdot\frac{1}{2}=\frac{10-k}{2(k+1)}=\frac{10-k}{2k+2}.$$

Сравним это выражение с единицей.

Ясно, что $\dfrac{10-k}{2k+2}=1$ при $k=\dfrac{8}{3}$; $\dfrac{10-k}{2k+2}<1$ при $k>\dfrac{8}{3}$, $\dfrac{10-k}{2k+2}>1$ при $k<\dfrac{8}{3}$.

Так как k – целое число, а $\dfrac{8}{3}\in(2;3)$, то $a_{k+1}<a_k$ при $k=3,4,\ldots,9$; $a_{k+1}>a_k$ при $k=0,1,2$. Таким образом, $a_0<a_1<a_2<a_3$; $a_3>a_4>\ldots>a_{10}$. Наибольшее значение коэффициента a_k достигается при $k=3$ и равно $a_3=C_{10}^3\cdot2^7=\dfrac{10\cdot9\cdot8}{6}\cdot128=10\cdot12\cdot128=15\,360.$

Отметим, что наибольший элемент строки треугольника Паскаля лежит в середине этой строки. А именно если $n=2k$ – четное число, то наибольшее из чисел C_n^0, C_n^1, ..., C_n^n равно $C_n^{\frac{n}{2}}=C_{2k}^k$. Если $n=2k+1$ – нечетное число, то таких «средних» элементов два – $C_n^{\frac{n-1}{2}}$ и $C_n^{\frac{n+1}{2}}$, то есть C_{2k+1}^k и C_{2k+1}^{k+1}. Этот факт легко доказать аналогично примеру 3.

Теперь обобщим на случай произвольной степени $n\in\boldsymbol{N}$ формулы разности квадратов и разности кубов.

Докажем, что имеет место следующая формула:

$$a^n-b^n=(a-b)\,(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1}),\text{ где } a,b\in\boldsymbol{R},\ n\in\boldsymbol{N}.$$

Доказательство.

Раскроем скобки в правой части равенства, получим:

$a^n-a^{n-1}b+a^{n-1}b-a^{n-2}b^2+a^{n-2}b^2-a^{n-3}b^3+\ldots+a^3b^{n-3}-a^2b^{n-2}+a^2b^{n-2}-ab^{n-1}+ab^{n-1}-b^n=$ $=a^n-b^n$ (все слагаемые, кроме правого a^n и последнего $-b^n$, в сумме дали нуль). ■

Можем записать следующий вывод:

$(a^n-b^n)\,\vdots\,(a-b)$ (частное $\dfrac{a^n-b^n}{a-b}$ при $a\neq b$ совпадает с многочленом от двух переменных).

Если n – нечетное натуральное число, то после замены b на $(-b)$ формулу разности n-х степеней можно превратить в формулу суммы n-х степеней (аналогичную формуле суммы кубов):

$$a^n+b^n=a^n-(-b)^n=(a-(-b))\,(a^{n-1}+a^{n-2}(-b)+a^{n-3}(-b)^2+\ldots+a(-b)^{n-2}+(-b)^{n-1}).$$

Так как $n-2$ – нечетное, а $n-1$ – четное натуральное число, то формула примет вид:

$$a^n+b^n=(a+b)\,(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\ldots-ab^{n-2}+b^{n-1}),$$

где $a,b\in\boldsymbol{R}$, n – нечетное натуральное число.

Можем записать следующий вывод:

$(a^n+b^n)\,\vdots\,(a+b)$ при нечетном натуральном n.

Зафиксируем **формулы сокращенного умножения высших степеней.**

I. Степень суммы (разности):

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-2}a^2b^{n-2} + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n$$

Здесь коэффициенты C_n^k вычисляются по треугольнику Паскаля (при этом формула для $(a-b)^n$ аналогична $(a+b)^n$, но ее первый коэффициент положителен, второй отрицателен и далее знаки коэффициентов чередуются).

II. Разность степеней:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

III. Сумма нечетных степеней:

$$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + a^{2k-2}b^2 - a^{2k-3}b^3 + \ldots - ab^{2k-1} + b^{2k}).$$

Применим формулы сокращенного умножения высших степеней к решению уравнений и неравенств.

Пример 4. Решить уравнение $(x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1)(x-3) = 0$.

Решение.

Многочлен пятой степени в левой части уравнения равен $(x-1)^5$; уравнение перепишется в виде $(x-1)^5(x-3) = 0$.

Решениями уравнения являются числа $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$.

Ответ: $\{1; 3\}$.

Пример 5. Решить неравенство $(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1)(x^3 - 3x + 2) \leqslant 0$.

Решение.

Представим в виде произведения каждый из множителей:

$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = (x-1)^4$; $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$.

Неравенство перепишется в виде $(x-1)^6(x+2) \leqslant 0$. Решим его методом интервалов:

Выберем промежутки, которые удовлетворяют знаку неравенства, и запишем ответ.

Ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup \{1\}$.

Пример 6. Решить уравнение $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 - 3x + 2) = 0$.

Решение.

Так как $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, а $(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^5 - 1$ (по формуле разности n-х степеней), то уравнение примет вид

$$(x^5-1)(x-2)=0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x^5-1=0 \\ x-2=0 \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x^5=1 \\ x=2 \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x=\sqrt[5]{1} \\ x=2 \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Ответ: $\{1; 2\}$.

Пример 7. Решить неравенство $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 > 0$.

Решение.

Так как $(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x-1) = x^7 - 1$, можем переписать неравенство в виде $\dfrac{x^7-1}{x-1} > 0$ (если $x \neq 1$).

Но при $x \neq 1$ знаки чисел $x - 1$ и $x^7 - 1$ (в силу строгого возрастания функции $y = x^7$ на всей числовой прямой) совпадают:

если $x > 1$, то $x^7 > 1$;

если $x < 1$, то $x^7 < 1$.

Поэтому $\dfrac{x^7-1}{x-1} > 0$ при всех $x \neq 1$.

А при $x = 1$ выражение $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ положительно. Поэтому исходное неравенство верно при всех $x \in \boldsymbol{R}$.

Пример 8. Решить неравенство $\dfrac{x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1}{x} < \dfrac{x^6}{x+1}$.

Решение.

Перенесем $\dfrac{x^6}{x+1}$ в левую часть и приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{(x+1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) - x^7}{x(x+1)} < 0$$

По формуле суммы нечетных степеней $(x + 1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) = x^7 + 1$.

Тогда числитель дроби равен $x^7 + 1 - x^7 = 1$, и неравенство примет вид $\dfrac{1}{x(x+1)} < 0$.

Ответ: $x \in (-1; 0)$.

К **293** Преобразуйте в многочлен стандартного вида:

а) $(x^2 + 3)^2$;
б) $(5m - 2n)^2$;
в) $(a^7 + 1)^3$;
г) $(2x - y)^3$.

294 Разложите на множители:

а) $49 - b^2$;
б) $x^4 - 16y^6$;
в) $27 + a^3$;
г) $8d^9 - 125$.

295 Решите уравнения с помощью формул сокращенного умножения:

а) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = 0$;
б) $(2x - 1)^2 - 25 = 0$.

296 1) Решите уравнение с помощью формул сокращенного умножения:
$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

2) Достаточно ли вам ваших знаний о формулах сокращенного умножения?

Познакомьтесь с формулами сокращенного умножения высших степеней и вернитесь к решению уравнения.

297 Решите уравнения:

а) $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 = 0$;
б) $(x - 4)^5 + 10(x - 4)^4 + 40(x - 4)^3 + 80(x - 4)^2 + 80(x - 4) + 32 = 0$;
в) $(x + 2)^4 - 4(x + 2)^3 + 6(x + 2)^2 - 4(x + 2) = 15$.

298 Встречается ли в треугольнике Паскаля число 123 456?

299 Сколько рациональных слагаемых содержится в разложении $\left(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3}\right)^{100}$ по формуле бинома Ньютона?

300 Докажите, что

$$1-3C_{100}^{1}+3^{2}\cdot C_{100}^{2}-3^{3}\cdot C_{100}^{3}+3^{4}\cdot C_{100}^{4}-\ldots-3^{99}\cdot C_{100}^{99}+3^{100}=$$
$$=1-5C_{50}^{1}+5^{2}\cdot C_{50}^{2}-5^{3}\cdot C_{50}^{3}+5^{4}\cdot C_{50}^{4}-\ldots-5^{49}\cdot C_{50}^{49}+5^{50}.$$

301 В разложении $(x+y)^n$ по формуле бинома Ньютона второй член оказался равен 240, третий 720, а четвертый 1080. Найдите x, y и n.

302 Докажите, что если p – простое число и $1 \leqslant k \leqslant p-1$, то C_p^k делится на p.

303 На сколько нулей оканчивается число $11^{100}-1$?

304 Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x+2y+3z=12 \\ 2x-y+z=-1 \\ 3x+7y-2z=5 \end{cases}$;   б) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+z=1 \\ x+3y+2z=3 \end{cases}$.

305 Решите уравнения, применяя метод понижения порядка уравнения:

а) $x^3-3x^2-6x+8=0$;

б) $x^4-x^3-7x^2+x+6=0$;

в) $x^3-3x^2+2=0$.

306 Решите уравнение:

$(x+2)((x+3)^3+(x+3)^2+(x+3)+1)=80$.

307 Встречается ли в треугольнике Паскаля число 19 900?

308 Сколько рациональных слагаемых содержится в разложении $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)^{300}$ по формуле бинома Ньютона.

309 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 4x-7y+8z=0 \\ x-2y-z=-3 \\ 6x+2y+3z=-9 \end{cases}$;   б) $\begin{cases} 2x+2y-z=0 \\ 20x-10y+z=4 \\ 5x+10y+5z=18 \end{cases}$.

310 Решите уравнение, применяя метод понижения порядка уравнения:

а) $x^3+5x^2+15x+27=0$;

б) $x^4-x^3-13x^2+x+12=0$;

в) $x^3+4x^2-5=0$.

311* Здесь изображен фрагмент гармонического треугольника Лейбница. Он строится следующим образом: числа на границе треугольника – обратные к последовательным натуральным числам; каждое число внутри равно сумме двух чисел, стоящих под ним. Найдите формулу, которая связывает числа из треугольников Паскаля и Лейбница.

$$\frac{1}{1}$$
$$\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{3}\quad\frac{1}{6}\quad\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{4}\quad\frac{1}{12}\quad\frac{1}{12}\quad\frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{5}\quad\frac{1}{20}\quad\frac{1}{30}\quad\frac{1}{20}\quad\frac{1}{5}$$
$$\frac{1}{6}\quad\frac{1}{30}\quad\frac{1}{60}\quad\frac{1}{60}\quad\frac{1}{30}\quad\frac{1}{6}$$

Экспресс-тест № 7

Примерное время выполнения – 60 минут

Часть А

№ 1

№ 1. Упростите выражение:

$$\left(\frac{x^{-1}+1}{x^{-1}-1}\right)^{-1}$$

А) $\frac{1-x}{1+x}$; Б) $\frac{1-x^2}{x^2}$; В) 1; Г) -1.

№ 2

№ 2. Вычислите значение числового выражения:

$$\left(9^{\frac{1}{4}}-\left(0{,}5\cdot\sqrt[3]{0{,}5}\right)^{-0{,}75}\right)\left(81^{0{,}125}+(0{,}5)^{-1}\right)$$

А) $\sqrt{3}+2$; Б) 1; В) -1; Г) 0.

№ 3

№ 3. Решите уравнение $(x^2+2x)^{\frac{1}{3}}=2$.

А) -2; 4; Б) -4; 2; В) 2; Г) $\varnothing$.

№ 4

№ 4. Найдите разность меньшего и большего корней уравнения:

$$(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12.$$

А) -7; Б) 7; В) 3; Г) -3.

№ 5

№ 5. Решите неравенство $\frac{x^4+7x^2-18}{(x-2)^2}\leqslant 0$.

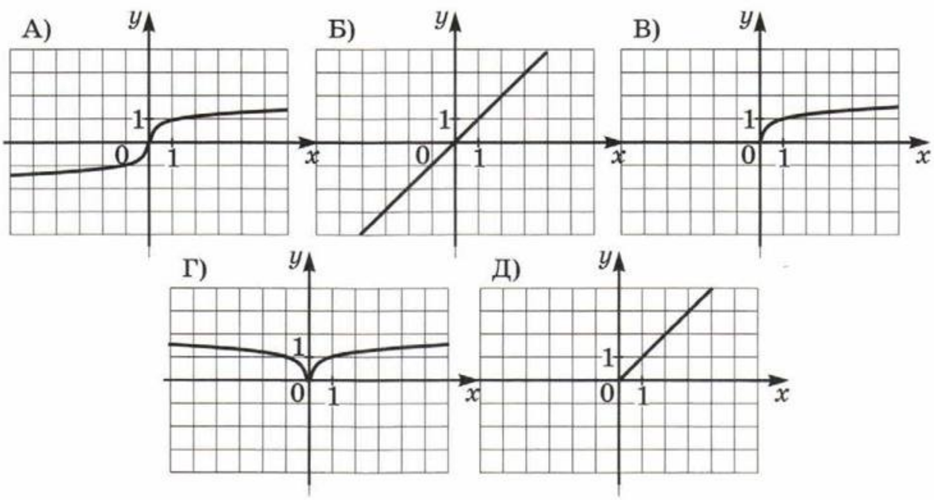
А) $(-\infty;-3]\cup(2;3]$; Б) $[-3;3]$; В) $[-3;2)\cup(2;3]$; Г) $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

№ 6			
1	2	3	4

№ 6. Каждому правилу $y=f(x)$, задающему функцию:

1) $y=x$; 2) $y=\sqrt[5]{x}$; 3) $y=\sqrt[4]{x}$; 4) $y=\sqrt[3]{|x|}$,

поставьте в соответствие график функции:



Часть В

(ход решения записывается на отдельном листе)

№ 7

№ 7. Представьте выражение $\dfrac{b\cdot\sqrt[6]{b^3\cdot\sqrt[3]{b^2}}}{\sqrt[9]{b^7}}$ в виде степени с основанием b.

А) b; Б) $b^{\frac{5}{6}}$; В) b^{-1}; Г) $b^{\frac{1}{14}}$.

№ 8

№ 8. Сколько корней имеет уравнение $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$?

А) 0; Б) 2; В) 3; Г) 4.

Часть С

(ход решения и ответ записывается на отдельном листе)

№ 9. Решите уравнение, понижая его порядок

$$x^4-7x^3+13x^2-2x-8=0.$$

Ответы и решения к тесту:

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6				№ 7	№ 8
					1	*2*	*3*	*4*		
А	*В*	*Б*	*Г*	*В*	*Б*	*А*	*В*	*Г*	*Б*	*Г*

№ 9

1) Подберем корень многочлена $x^4-7x^3+13x^2-2x-8$. Корнем многочлена является $x_1=2$, так как $16-56+52-4-8=0$.

2) Разделим многочлен 4-й степени левой части уравнения на $x-2$, получим в частном x^3-5x^2+3x+4.

Значит, $x^4-7x^3+13x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^3-5x^2+3x+4)=0$.

3) Корнем кубического многочлена левой части уравнения является число $x_2=4$, так как $64-80+12+4=0$.

4) Разделим многочлен x^3-5x^2+3x+4 на $x-4$, получим в частном x^2-x-1.

Значит, $x^4-7x^3+13x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4)(x^2-x-1)=0$.

5) Квадратный трехчлен x^2-x-1 имеет корни $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Отсюда, исходное уравнение имеет четыре корня 2; 4; $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

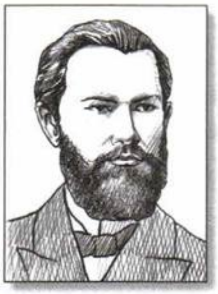
Ответ: $\left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};2;4\right\}$.

Шкала успешности:

10–11 баллов – *отлично*
8–9 баллов – *хорошо*
5–7 баллов – *удовлетворительно*

§ 5. Системы нелинейных уравнений

1. Решение систем способом подстановки и сложения



Ах, экономна мудрость бытия:
все новое в ней шьется из старья.

К. М. Фофанов (1862—1911),
русский поэт

Нам хорошо известны способы решения систем *линейных* уравнений с двумя неизвестными (метод подстановки и метод алгебраического сложения). Как мы знаем, способ подстановки предполагает выражение одного из неизвестных через другое из одного уравнения с последующей его подстановкой в другое уравнение системы. Способ алгебраического сложения предполагает замену одного из уравнений системы на его на сумму или разность с другим уравнением. Применение этих способов позволяло нам переходить от уравнения с двумя неизвестными к уравнению с одним неизвестным.

Однако на практике возникают системы, которые содержат *нелинейные* уравнения с двумя неизвестными, — например, уравнения, содержащие вторую, третью и более высокие степени неизвестных, — дробные или иррациональные выражения. Подойдут ли известные нам способы для решения таких систем? В этом пункте мы ответим на этот вопрос.

Попробуем решить способом подстановки системы нелинейных уравнений.

Пример 1. Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} x+y=6 \\ x^2-y^2=12 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+y^3=2 \\ 2x+x^2+5y^3=8 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x^2+3y=1 \\ x^4+4y=12 \end{cases}$.

Решение.

а) Из первого уравнения выразим $y = 6 - x$; исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} y=6-x \\ x^2-(6-x)^2=12 \end{cases}.$$

Второе уравнение перепишем в виде $12x - 36 = 12$, откуда $x = 4$, тогда, подставляя найденное значение x в первое уравнение, получим $y = 6 - 4 = 2$.

Ответ: (4; 2).

Систему можно было решить и другим способом:

$$\begin{cases} x+y=6 \\ (x+y)(x-y)=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ 6(x-y)=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ x-y=2 \end{cases}.$$

Это линейная система, решая которую, опять-таки, получим: $x = 4$, $y = 2$.

б) Удобнее выразить из первого уравнения $y^3 = 2 - x$; исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} y^3=2-x \\ 2x+x^2+5(2-x)=8 \end{cases}.$$

Второе уравнение сводится к квадратному уравнению $x^2 - 3x + 2 = 0$, имеющему два корня: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Система распадается на две системы:

$$\begin{cases} y^3 = 2 - x \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y^3 = 2 - x \\ x = 2 \end{cases}.$$

Решим каждую из них. Если $x = 1$, то $y^3 = 2 - x = 1$, $y = 1$; если $x = 2$, то $y^3 = 2 - x$, $y = 0$.

Ответ: (1; 1), (2; 0).

Как мы видим, в отличие от систем линейных уравнений система нелинейных уравнений может иметь несколько решений: обе пары чисел обращают уравнения этой системы в верные равенства.

в) Из первого уравнения системы имеем: $y = \dfrac{1-x^2}{3}$; тогда исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} y = \dfrac{1-x^2}{3} \\ x^4 + \dfrac{4}{3}(1-x^2) = 12 \end{cases}.$$

Второе уравнение сводится к биквадратному уравнению $3x^4 - 4x^2 - 32 = 0$. После замены $x^2 = t$ получим квадратное уравнение $3t^2 - 4t - 32 = 0$, имеющее 2 корня $t_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 3 \cdot 32}}{3}$, то есть $t_1 = 4$, $t_2 = -\dfrac{8}{3}$.

Так как $t = x^2 \geqslant 0$, то $t = 4$, $x = \pm 2$. Система распадается на две системы:

$$\begin{cases} y = \dfrac{1-x^2}{3} \\ x = 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = \dfrac{1-x^2}{3} \\ x = -2 \end{cases}.$$

Решим каждую из них. Если $x = 2$, то $y = \dfrac{1-x^2}{3} = \dfrac{1-2^2}{3} = -1$; если $x = -2$, то также $y = -1$.

Ответ: (2; –1); (–2; –1).

Теперь рассмотрим решение систем способом алгебраического сложения.

Пример 2. Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} y^2 - x^2 = 4 - 4x \\ x^2 + y^2 + 3xy = 4 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 12x^2 + 2y^2 - 6x + 5y = 3 \\ 18x^2 + 3y^2 - 6x + 8y = 7 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 7 - x + y - xy = 0 \\ 5 - y + x - xy = 0 \end{cases}$; г) $\begin{cases} x^3 + 2x^2y + xy^2 - x - y = 2 \\ y^3 + 2xy^2 + x^2y + x + y = 6 \end{cases}$.

Решение.

а) Заменим первое уравнение разностью первого и второго уравнений (второе уравнение остается без изменений). Исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} -2x^2 - 3xy = -4x \\ x^2 + y^2 + 3xy = 4 \end{cases}.$$

Первое уравнение полученной системы перепишем в виде $2x^2 - 4x + 3xy = 0$. Вынесем общий множитель левой части за скобки, получим $x(2x - 4 + 3y) = 0$.

Уравнение $x(2x - 4 + 3y) = 0$ распадается на два уравнения
$x = 0$ и $2x - 4 + 3y = 0$.

Поэтому система распадается на две системы:

$$\begin{cases} x=0 \\ x^2+y^2+3xy=4 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x-4+3y=0 \\ x^2+y^2+3xy=4 \end{cases}.$$

Если $x = 0$, то второе уравнение системы имеет вид $y^2 = 4$, то есть $y = \pm 2$.

Выразим x из первого уравнения второй системы: $x=2-\frac{3}{2}y$. Подставляя его во второе уравнение, получим:

$\left(2-\frac{3}{2}y\right)^2+y^2+3\left(2-\frac{3}{2}y\right)y=4$, что равносильно $y^2 = 0$. Отсюда $y = 0$, $x = 2$.

Ответ: (0; 2), (0; –2), (2; 0).

б) Заменим первое уравнение разностью первого и второго уравнений. Исходная система равносильна системе:

$$\begin{cases} 2+2y-2x=0 \\ 5-y+x-xy=0 \end{cases}.$$

Первое уравнение системы перепишем в виде $y = x - 1$. Подставляя $y = x - 1$ во второе уравнение, получим равносильную систему:

$$\begin{cases} y=x-1 \\ 5-x+1+x-x(x-1)=0 \end{cases}.$$

Второе уравнение системы сводится к квадратному уравнению $x^2 - x - 6 = 0$, которое имеет два корня $x_1 = 3$, $x_2 = -2$.

Если $x = 3$, то $y = x - 1 = 2$; если $x = -2$, то $y = x - 1 = -3$.

Ответ: (3; 2), (–2;–3).

в) Умножим первое уравнение на 3, а второе на 2:

$$\begin{cases} 12x^2+2y^2-6x+5y=3 \\ 18x^2+3y^2-6x+8y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36x^2+6y^2-18x+15y=9 \\ 36x^2+6y^2-12x+16y=14 \end{cases}.$$

Вычтем из первого уравнения второе и запишем полученное уравнение в качестве первого уравнения системы, на месте второго запишем, например, первое уравнение исходной системы:

$$\begin{cases} 36x^2+6y^2-18x+15y=9 \\ 36x^2+6y^2-12x+16y=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x-y=-5 \\ 12x^2+2y^2-6x+5y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5-6x \\ 12x^2+2y^2-6x+5y=3 \end{cases}.$$

Подставляя $y = 5-6x$ во второе уравнение получившейся системы, имеем равносильную систему:

$$\begin{cases} y=5-6x \\ 12x^2+2(5-6x)^2-6x+5(5-6x)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5-6x \\ 7x^2-13x+6=0 \end{cases}.$$

Второе уравнение преобразовали следующим образом:

$12x^2 + 50 - 120x + 72x^2 - 6x + 25 - 30x = 3 \Leftrightarrow 84x^2 - 156x + 72 = 0 \Leftrightarrow 7x^2 - 13x + 6 = 0.$

Полученное уравнение имеет два корня: $x_1 = 1$, $x_2=\frac{6}{7}$.

Если $x = 1$, то $y = 5 - 6x = -1$; если $x=\frac{6}{7}$, то $y=5-6x=-\frac{1}{7}$.

Ответ: (1; –1), $\left(\frac{6}{7};-\frac{1}{7}\right)$.

г) Заметим, что сумма уравнений системы имеет вид

$x^3+y^3+3x^2y+3xy^2=8$, то есть $(x+y)^3=8$, что равносильно $x+y=2$. Заменим второе уравнение на сумму уравнений системы, а первое оставим без изменений. Получим равносильную систему

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x^3+2x^2y+xy^2-x-y=2 \end{cases}.$$

Выразим из первого уравнения $y=2-x$ и подставим во второе; получим

$$\begin{cases} y=2-x \\ x^3+2x^2(2-x)+x(2-x)^2-x-(2-x)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-x \\ 4x-2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-x \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=1 \end{cases}.$$

Ответ: (1; 1).

Исходя из разобранных нами примеров можем сделать вывод, что **известные нам способ подстановки и способ алгебраического сложения работают и для некоторых систем нелинейных уравнений**, однако имеет место ряд особенностей:

- при решении систем можно использовать все известные нам методы решения нелинейных уравнений, включая введение нового неизвестного и разложение на множители;
- полученное в ходе решения уравнение с одним неизвестным степени выше двух может иметь несколько корней или «распадаться» на несколько уравнений более низких степеней, тогда в ходе решения рассматриваются две (и более) систем, на которые «распадается» исходная.

Отметим, что в отличие от систем линейных уравнений, где известные нам способы в конечном итоге позволяют решить любую систему, в случае систем нелинейных уравнений такой гарантии нет. Тем не менее очень часто удается свести исходную систему к системе, одно из уравнений которой – квадратное (или более сложное, но посильное для решения) уравнение с одним неизвестным. После решения полученного уравнения найденные значения соответствующего неизвестного подставляются во второе уравнение системы.

* * *

Отметим, что аналогичные способы можно использовать и для решения систем с тремя и более неизвестными.

Способ подстановки предполагает выражение одного из неизвестных через остальные из одного уравнения системы. После чего его подставляют в остальные уравнения системы; в результате каждого такого преобразования система будет сводиться к системе, в которой количество и уравнений, и неизвестных уменьшатся на единицу.

Способ алгебраического сложения предполагает замену одного из уравнений системы на его линейную комбинацию с некоторыми другими уравнениями той же системы (например, их сумму или разность). Полученное уравнение будет содержать меньше неизвестных или выглядеть проще. При этом чаще всего удается свести исходную систему к системе, одно из уравнений которой – квадратное (или более сложное) уравнение с одним неизвестным. После решения этого уравнения значения соответствующего неизвестного вычисляются, и система сводится к системе, в которой на одно уравнение и на одно неизвестное меньше.

Разбирать примеры решения систем с тремя неизвестными мы не будем, так как их решение достаточно сложное и выходит за рамки нашего курса.

К **312** Решите устно системы линейных уравнений с двумя неизвестными:

а) $\begin{cases} 2x+y=32 \\ y=2x \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x+5y=1 \\ 2x-5y=3 \end{cases}$.

Какие способы решения систем линейных уравнений вам известны?

313 1) Рассмотрите системы:

а) $\begin{cases} x^2-y^2=184 \\ x-y=4 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x^2+xy=-1 \\ 2x-xy=0 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x+y^3=2 \\ 2x+x^2+5y^3=8 \end{cases}$.

Можно ли назвать их системами линейных уравнений с двумя неизвестными? Предположите, как они называются. Сопоставьте свой вариант с общепринятым, используя учебник.

2) Какой из известных вам способов подойдет для решения первой системы? Решите ее.

3) Какой из известных вам способов подойдет для решения второй системы? Решите ее.

4) Решите третью систему. Сопоставьте ход своего решения с решением на стр. 93–94.

5) Сделайте выводы о способах, которые можно использовать для решения подобных систем. Что нового в решении систем нелинейных уравнений по сравнению с системами линейных уравнений? Познакомьтесь с другими особенностями решения систем нелинейных уравнений, разобрав примеры на стр. 94–96.

314 Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x+y=3 \\ x^3+x^2y=12 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x-y=4 \\ 4x^2-y^2=32 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x^2+y^5=4 \\ 6x+2x^2+3y^5=12 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} x^2+y=4 \\ x^4+10y=31 \end{cases}$; д) $\begin{cases} y^2+1-x=0 \\ y^2+y^3=xy \end{cases}$.

315 Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x=4-y \\ \dfrac{x+2}{y-3}+\dfrac{y+2}{x-3}=-8 \end{cases}$; б) $\begin{cases} (x-2)(y-3)=1 \\ \dfrac{x-2}{y-3}=1 \end{cases}$; в) $\begin{cases} \dfrac{4}{x}+\dfrac{6}{y}=1\dfrac{1}{6} \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{y}=\dfrac{1}{6} \end{cases}$.

316 Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2-4y^2=0 \\ xy+x^2=6 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x+3xy=2y+13 \\ 2xy+y=x+4 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x^2-xy=x \\ y^2+2xy=1 \end{cases}$.

317 В первом зрительном зале 320 мест, а во втором 360. В первом зале на 2 ряда больше, чем во втором, но в каждом ряду на 4 места меньше, чем в каждом ряду второго зала. Сколько рядов в каждом из этих залов кинотеатра?

318 По круговой дороге велодрома едут два велосипедиста с неизменными скоростями. Когда они едут в противоположных направлениях, то встречаются каждые 10 секунд, когда же они едут в одном направлении, то один настигает другого каждые 170 секунд. Какова скорость каждого велосипедиста, если длина круговой дороги 170 метров?

П **319** Решите уравнения:

а) $x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x^2 + 1 = 0$;

б) $(x-2)^5 + 5(x-2)^4 + 10(x-2)^3 + 10(x-2)^2 + 5(x-2) + 1 = 0$.

320 Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{\sqrt[7]{2}-1}$.

321 Докажите, что $7^{n+2} + 8^{2n+1}$ делится на 57 при любом натуральном n.

322 Докажите, что при нечетном натуральном n выражение $11n + 13$ делится нацело на 12.

323 Решите дробно-рациональные уравнения с помощью замены неизвестного:

а) $-\frac{x-1}{2x} = 13 - 4\left(\frac{x-1}{2x} + 1\right)$; б) $x^2 - 4x - \frac{20}{x^2-4x} = 1$.

Д **324** Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x^2y - x^3 = -25 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x-3y=1 \\ x^2-9y^2=19 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x^2+3y^3=1 \\ y^3-x^2+7x=2 \end{cases}$; г) $\begin{cases} x^2-y=5 \\ x^4-5y=21 \end{cases}$.

325 Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} y=5-x \\ \frac{x-3}{y+4} + \frac{y-3}{x+4} = -\frac{1}{20} \end{cases}$; б) $\begin{cases} (x+1)(y-3)=4 \\ \frac{x+1}{y-3}=1 \end{cases}$; в) $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{10}{y}=7 \\ \frac{3}{x}-\frac{2}{y}=2 \end{cases}$.

326 Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} 9x^2-y^2=0 \\ 3xy+y^2=3y-1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 4x-xy=2y+6 \\ xy+y=2x+2 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x^2-3xy=4 \\ y^2+2xy=y \end{cases}$.

327 На двух сторонах прямоугольника построены квадраты. Площадь одного из них на 65 см^2 больше площади другого. Найдите длину и ширину прямоугольника, если известно, что его площадь составляет 36 см^2.

328 Велосипедист и автобус одновременно выехали навстречу друг другу из поселков A и B и, встретившись через 20 минут, продолжили движение. Автобус, доехав до A, сделал остановку на 6 минут и сразу отправился обратно в B, догнав велосипедиста в 7,5 км от A. Найдите расстояние между A и B, если известно, что скорость велосипедиста составляет 20% от скорости автобуса.

329 Решите уравнения, используя формулы сокращенного умножения высших степеней:

а) $x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16 = 0$;

б) $(x+3)^5 + 10(x+3)^4 + 40(x+3)^3 + 80(x+3)^2 + 80(x+3) + 32 = 0$.

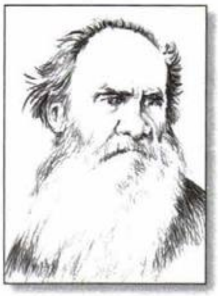
330 Докажите, что $3^{3n} - 1$ делится на 13 при любом натуральном n.

331 Решите дробно-рациональные уравнения с помощью замены неизвестного:

а) $5\left(1+\frac{x}{x-3}\right) = \frac{2x}{x-3} - 1$; б) $x^2 - 6x - \frac{63}{x^2-6x} = -2$.

С **332*** Решите систему уравнений $\begin{cases} xy=1 \\ yz=2 \\ zx=8 \end{cases}$.

2. Другие способы решения систем нелинейных уравнений с двумя неизвестными



Никогда не беспокой другого тем, что ты можешь сделать сам.

Л.Н. Толстой (1828–1910), русский писатель, мыслитель

В предыдущем пункте для решения систем мы использовали уже известные нам способы подстановки и алгебраического сложения. Однако, как мы отмечали, они работают не всегда. В этом пункте мы познакомимся с другими способами, позволяющими решить системы нелинейных уравнений.

Рассмотрим решение следующей системы:

$$\begin{cases} x^2+xy-6y^2=0 \\ x^2-5xy+2y^2=-4 \end{cases}.$$

Обратим внимание на первое уравнение этой системы. Оно обладает рядом свойств, которые помогут нам решить эту систему.

Рассмотрим общий вид подобных уравнений с двумя неизвестными:

$Ax^2+Bxy+Cy^2=0$.

Определение. Уравнение с двумя неизвестными $Ax^2+Bxy+Cy^2=0$ называется **однородным уравнением второй степени относительно x, y.** Если при этом $A\neq 0$ и $C\neq 0$, то уравнение называется **полным** однородным уравнением второй степени относительно x, y.

Если $A=0$ или $C=0$, то уравнение равносильно совокупности двух линейных уравнений.

Например, при $A=0$ получим $Bxy+Cy^2=0 \Leftrightarrow y\,(Bx+Cy)=0$, откуда либо $y=0$, либо $Bx+Cy=0$.

Пусть теперь $A\neq 0$, $C\neq 0$. Заметим, что если $x=0$, то и $y=0$. И наоборот, если $y=0$, то и $x=0$.То есть решением любого такого уравнения является пара (0; 0).

А для любого другого решения (если оно есть) числа x и y оба отличны от нуля.

Попытаемся найти решения, отличные от (0; 0).

Так как теперь $y\neq 0$, то обе части уравнения можно разделить на y^2:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2=0,\ y\neq 0 \Leftrightarrow A\left(\frac{x}{y}\right)^2+B\frac{x}{y}+C=0.$$

Если обозначить $t=\dfrac{x}{y}$, то получится квадратное уравнение $At^2+Bt+C=0$, из которого можно найти значение отношения $\dfrac{x}{y}$.

Воспользуемся этой идеей для решения нашей системы.

Как было отмечено, полным однородным является первое уравнение системы. Пара чисел (0; 0) не удовлетворяет второму уравнению системы, значит, не является решением системы, поэтому оба неизвестных отличны от нуля. Разделив обе части однородного уравнения на y^2, получим $\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}-6=0$. Обозначив $t=\frac{x}{y}$, получим квадратное уравнение $t^2+t-6=0$.

Решив это уравнение, получим два корня: $t_1=2$, $t_2=-3$. Откуда, возвращаясь к «старым» неизвестным получим $\frac{x}{y}=2$ или $\frac{x}{y}=-3$. Система распадается на две системы:

$$\begin{cases} x=2y \\ x^2-5xy+2y^2=-4 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x=-3y \\ x^2-5xy+2y^2=-4 \end{cases}$$

Решим каждую из них.

Подставляя $x=2y$ во второе уравнение первой системы, имеем:

$4y^2-10y^2+2y^2=-4 \Leftrightarrow -4y^2=-4 \Leftrightarrow y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm1$.

Если $y=1$, то $x=2$; если $y=-1$, то $x=-2$.

Подставляя $x=-3y$ во второе уравнение второй системы, имеем:

$9y^2+15y^2+2y^2=-4 \Leftrightarrow 26y^2=-4$. Это уравнение не имеет решений, соответственно, вторая система не имеет решения.

Ответ: (2; 1), (−2; −1).

Итак, для решения систем нелинейных уравнений, содержащих полное однородное уравнение второй степени, мы можем использовать следующий способ.

Алгоритм решения системы с полным однородным уравнением второй степени относительно *x*, *y*.

1. Проверить, является ли решение полного однородного уравнения (0; 0) решением системы.

2. При условии $y \neq 0$ разделить однородное уравнение на y^2.

3. Считать отношение $\frac{x}{y}$ новым неизвестным и решить полученное квадратное уравнение.

4. Найдя значение отношения $\frac{x}{y}$, выразить из этого равенства x через y.

5. Подставить выражение x через y во второе уравнение.

6. Решить систему, пользуясь полученным уравнением с одним неизвестным.

Отметим, что обе части уравнения можно разделить и на x^2, тогда из него можно найти отношение $\frac{y}{x}$ и подставить выражение y через x во второе уравнение.

Применим этот способ для решения следующих систем.

Пример 1. Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x^2-3xy+3y^2=80 \\ x\ +xy-2y^2=-56 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x^3-x=y^3-y \\ 2x^2+3y^2=5xy \end{cases}$.

Решение.

а) Ни одно из уравнений системы не является однородным. Но если умножить первое уравнение на 7, а второе – на 10 и сложить их, получим полное однородное уравнение второй степени относительно x, y:

$7(2x^2-3xy+3y^2)+10(x^2+xy-2y^2)=0 \Leftrightarrow y^2-11xy+24x^2=0$.

Оставим одно из уравнение системы без изменений, а другое заменим на полученное. Имеем систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} y^2 - 11xy + 24x^2 = 0 \\ x^2 + xy - 2y^2 = -56 \end{cases}$$

Убедимся в том, что пара (0; 0) не удовлетворяет второму уравнению системы ($0 \neq -56$); значит, эта пара чисел не является решением системы.

Можем разделить обе части однородного уравнения на x^2, получим

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 11\frac{y}{x} + 24 = 0.$$

Обозначив $t = \frac{y}{x}$, получим квадратное уравнение $t^2 - 11t + 24 = 0$, имеющее два корня: $t_1 = 3$, $t_2 = 8$. Система распадается на две системы:

$$\begin{cases} y = 3x \\ x^2 + xy - 2y^2 = -56 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = 8x \\ x^2 + xy - 2y^2 = -56 \end{cases}$$

Решим каждую из них. Подставляя $y = 3x$ во второе уравнение первой системы, получим:

$x^2 + 3x^2 - 18x^2 = -56 \Leftrightarrow -14x^2 = -56 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$

Если $x = 2$, то $y = 6$; если $x = -2$, то $y = -6$.

Подставляя $y = 8x$ во второе уравнение второй системы, получим:

$$x^2 + 8x^2 - 128x^2 = -56 \Leftrightarrow -119x^2 = -56 \Leftrightarrow x^2 = \frac{8}{17} \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{\frac{2}{17}}.$$

Если $x = 2\sqrt{\frac{2}{17}}$, то $y = 16\sqrt{\frac{2}{17}}$; если $x = -2\sqrt{\frac{2}{17}}$, то $y = -16\sqrt{\frac{2}{17}}$.

Ответ: (2;6), (−2;−6), $\left(2\sqrt{\frac{2}{17}}; 16\sqrt{\frac{2}{17}}\right)$, $\left(-2\sqrt{\frac{2}{17}}; -16\sqrt{\frac{2}{17}}\right)$.

б) Полным однородным является второе уравнение системы. В отличие от предыдущих систем пара (0; 0) является решением данной системы, так как удовлетворяет и первому уравнению. Мы учтем это в ходе дальнейшего решения. Пока будем действовать по известному алгоритму, считая, что $x \neq 0$. Разделив обе части второго уравнения на x^2, получим $2 + 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 5\frac{y}{x}$. Обозначив $t = \frac{y}{x}$, получим квадратное уравнение $3t^2 - 5t + 2 = 0$, имеющее два корня: $t_1 = 1$, $t_1 = \frac{2}{3}$. Система распадается на две системы:

$$\begin{cases} y = x \\ x^3 - x = y^3 - y \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = \frac{2}{3}x \\ x^3 - x = y^3 - y \end{cases}, \text{ где } x \neq 0.$$

Решим каждую из них. Подставляя $y = x$ во второе уравнение первой системы, получим: $x^3 - x = x^3 - x$, что выполняется для любых значений x. Таким образом, все пары $(x; y)$ такие, что $y = x$, $x \neq 0$, являются решениями системы. Система имеет бесконечно много решений вида $(x; x)$, где $x \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$.

Подставляя $y = \frac{2}{3}x$ во второе уравнение второй системы, получим:

$$x^3 - x = \frac{8}{27}x^3 - \frac{2}{3}x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{19}{27}x^3 - \frac{x}{3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 19x^3 - 9x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(19x^2 - 9) = 0.$$

Поскольку $x \neq 0$, получаем: $19x^2 - 9 = 0$, то есть $x = \pm\dfrac{3}{\sqrt{19}}$.

Если $x = \dfrac{3}{\sqrt{19}}$, то $y = \dfrac{2}{3}x = \dfrac{2}{\sqrt{19}}$; если $x = -\dfrac{3}{\sqrt{19}}$, то $y = -\dfrac{2}{\sqrt{19}}$.

Помня, что пара чисел (0; 0) является решением системы, добавим ее в ответ к найденным решениям. Однако ее можно включить в решение $(x; x)$, полученное при решении первой системы, так как эта пара тоже имеет вид $(x; x)$, тогда решение будет иметь вид $(x; x)$, где $x \in \boldsymbol{R}$.

Ответ: $(x; x)$, $x \in \boldsymbol{R}$, $\left(\dfrac{3}{\sqrt{19}}; \dfrac{2}{\sqrt{19}}\right)$, $\left(-\dfrac{3}{\sqrt{19}}; -\dfrac{2}{\sqrt{19}}\right)$.

В связи с рассмотренным в этом примере случаем дополним алгоритм решения системы с полным однородным уравнением второй степени еще одним шагом.

7. Если пара (0; 0) является решением системы, в ответ, кроме полученного решения, записать пару (0; 0).

Рассмотрим еще один способ решения систем нелинейных уравнений.

Пример 2. Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{5}{x^2+xy} + \dfrac{4}{y^2+xy} = \dfrac{13}{6} \\ \dfrac{8}{x^2+xy} - \dfrac{1}{y^2+xy} = 1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+2y} = \dfrac{5}{2} \\ x^2+xy+y^2 = 21 \end{cases}$.

Решение.

а) Анализируя уравнения системы, можно заметить повторяющиеся выражения. Введем два новых неизвестных, обозначая $u = \dfrac{1}{x^2+xy}$, $v = \dfrac{1}{y^2+xy}$, после чего исходная система станет линейной: $\begin{cases} 5u+4v = \dfrac{13}{6} \\ 8u - v = 1 \end{cases}$.

Выражая $v = 8u - 1$ и подставляя в первое уравнение, имеем:

$5u + 4(8u-1) = \dfrac{13}{6} \Leftrightarrow 37u = \dfrac{37}{6} \Leftrightarrow u = \dfrac{1}{6}$, тогда $v = 8u - 1 = \dfrac{1}{3}$.

Возвратимся к «старым» неизвестным, система примет вид:

$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+xy} = \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{1}{y^2+xy} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$, откуда $\begin{cases} x^2+xy = 6 \\ y^2+xy = 3 \end{cases}$.

Сложив уравнения системы, получим $(x + y)^2 = 9$, т.е. $x + y = \pm 3$. Система распадается на две системы: $\begin{cases} x+y=3 \\ x(x+y)=6 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y=-3 \\ x(x+y)=6 \end{cases}$.

Решим каждую из них

1. $\begin{cases} x+y=3 \\ x(x+y)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+y=3 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases}$;

2. $\begin{cases} x+y=-3 \\ x(x+y)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-3 \\ x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2+y=-3 \\ x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=-2 \end{cases}$.

Ответ: (2; 1), (−2;−1).

б) В первом уравнении введем новое неизвестное, обозначив $t=\dfrac{x+2y}{x-y}$; уравнение примет вид $t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{5}{2}$ и сводится к квадратному $2t^2-5t+2=0$, которое имеет 2 корня: $t_1=2$ и $t_2=\dfrac{1}{2}$.

Возвращаясь к «старым» неизвестным, получим: $\dfrac{x+2y}{x-y}=2$ или $\dfrac{x+2y}{x-y}=\dfrac{1}{2}$.

Если $\dfrac{x+2y}{x-y}=2$, то $x=4y$; если $\dfrac{x+2y}{x-y}=\dfrac{1}{2}$, то $x=-5y$. Система распадается на две системы:

$$\begin{cases}x=4y\\ x^2+xy+y^2=21\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}x=-5y\\ x^2+xy+y^2=21\end{cases}.$$

Решим каждую из них. Подставляя $x=4y$ во второе уравнение первой системы, получим:

$16y^2+4y^2+y^2=21 \Leftrightarrow y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm1$.

Если $y=1$, то $x=4$; если $y=-1$, то $x=-4$.

Подставляя $x=-5y$ во второе уравнение второй системы, получим:

$25y^2-5y^2+y^2=21 \Leftrightarrow y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm1$.

Если $y=1$, то $x=-5$; если $y=-1$, то $x=5$.

Ответ: (4; 1), (−4; −1), (5; −1), (−5; 1).

Можем сделать вывод: некоторые системы путем удачного **введения нового неизвестного** (новых неизвестных) можно свести к более простой системе, решать которую мы уже умеем.

В заключение заметим, что аналогичные способы можно применять и при решении систем с тремя и более неизвестными.

К **333** 1) Какое из данных уравнений можно считать «лишним»?

а) $2x^2+3xy+4y^2=0$; б) $x^2+3xy-y^2=0$; в) $0{,}2x^2-xy-4y^2=0$; г) $2x^2+y=0$.

Запишите в обобщенном виде остальные уравнения. Познакомьтесь с их названием на стр. 99.

2) Найдите значение y при $x=0$ для первого уравнения. Найдите значение x при $y=0$. Какой вывод о паре чисел (0; 0) вы можете сделать? Можно ли обобщить этот вывод для всех полных однородных уравнений второй степени?

334 1) Найдите значение отношения $\dfrac{x}{y}$ из уравнения $x^2+xy-6y^2=0$.

2) Попробуйте решить систему:

$$\begin{cases}x^2+xy-6y^2=0\\ x^2-5xy+2y^2=-4\end{cases}.$$

Сопоставьте ход своего решения этой системы с решением на стр.99–100.

3) Подойдет ли использованный способ для решения всех систем с полным однородным уравнением второй степени относительно x, y?

4) Составьте алгоритм решения подобных систем. Сопоставьте его с алгоритмом, изложенным на стр. 100. Какие случаи могут возникнуть при выполнении шага 1 этого алгоритма? Уточните алгоритм.

335 Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x^2 - xy - 3y^2 = 0 \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = -1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 3 \\ 2x^2 - 2xy - y^2 = -6 \end{cases}$

336 Решите систему уравнений $\begin{cases} (x^2 - xy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 185 \\ (x^2 + xy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 65 \end{cases}$.

337 Проанализируйте систему:

$$\begin{cases} \dfrac{5}{x^2 + xy} + \dfrac{4}{y^2 + xy} = \dfrac{13}{6} \\ \dfrac{8}{x^2 + xy} - \dfrac{1}{y^2 + xy} = 1 \end{cases}.$$

Как можно свести ее к более простой системе? Попробуйте решить эту систему и сопоставьте ход своего решения с решением на стр.102–103. Сделайте вывод о том, какой прием позволяет решать системы нелинейных уравнений.

338 Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{6}{x+y} + \dfrac{5}{x-y} = 7 \\ \dfrac{3}{x+y} - \dfrac{2}{x-y} = -1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0 \\ 2x^2 - y^2 + 4x + 2y - 7 = 0 \end{cases}$.

339 Решите систему уравнений $\begin{cases} x^3 - y^3 = 7 \\ x^2y - xy^2 = 2 \end{cases}$.

П **340** Решите системы:

а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ x + y = -1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 1 - xy \\ x + y = -2 \end{cases}$.

341 Решите задачу Диофанта (III век):
Два числа таковы, что их отношение равно 3, а отношение суммы квадратов этих чисел к их сумме равно 5. Найдите эти числа.

342 Решите уравнения, используя теорему, обратную теореме Виета:
а) $x^2 + 11x + 30 = 0$; б) $5x^2 + 18x - 23 = 0$; в) $x^2 - 285x + 2750 = 0$.

343 Найдите пару чисел x_1 и x_2, таких, что
а) $x_1 + x_2 = 11$ и $x_1 \cdot x_2 = 24$; б) $x_1 + x_2 = -2$ и $x_1 \cdot x_2 = -6$.

Д **344** Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + 3xy - 8y^2 = 2 \\ 2x^2 - 5xy + y^2 = -1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 3 \\ x^2 + 2xy - 5y^2 = -5 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x + y - 4 = 0 \\ 3x^2 - 2y^2 - 9x - 2y + 18 = 0 \end{cases}$.

345 Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{1}{2x+y} + \dfrac{2}{3x-y} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{2}{2x+y} - \dfrac{1}{3x-y} = \dfrac{7}{4} \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dfrac{2}{x^2 - xy} + \dfrac{3}{y^2 - xy} = -2 \\ \dfrac{4}{x^2 - xy} - \dfrac{1}{y^2 - xy} = 3 \end{cases}$.

346 Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=-\dfrac{3}{4} \end{cases}$.

347 Решите системы уравнений:

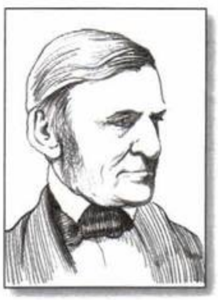
а) $\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ x-y=3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x^2-2xy+y^2=xy-1 \\ x-y=1 \end{cases}$.

348 Найдите пару чисел x_1 и x_2 таких, что

а) $x_1+x_2=-1$ и $x_1 \cdot x_2=-12$; б) $x_1+x_2=4$ и $x_1 \cdot x_2=-7$.

C **349*** Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=2 \\ xy-z^2=1 \end{cases}$.

3.* Симметрические системы уравнений



Человеческая природа любит не противоречия, а симметрию.

Ральф Уальдо Эмерсон (1803–1882), американский поэт и философ

В этом пункте мы познакомимся еще с одним способом, позволяющим решать определенный вид систем нелинейных уравнений.

Рассмотрим, например, решение следующей системы:

$$\begin{cases} xy+2x+2y-5=0 \\ x^2+y^2+3x+3y-8=0 \end{cases}.$$

Обратим внимание на уравнения этой системы. В левой их части стоят необычные многочлены: заменив в многочлене $xy + 2x + 2y - 5$ переменную x переменной y, а переменную y — переменной x, мы получим точно такой же многочлен. Таким же свойством обладает и многочлен $x^2 + y^2 + 3x + 3y - 8$. Такие многочлены называют симметрическими. Введем следующие определения.

Определение 1. Функция $f(x, y)$ от двух переменных x, y называется **симметрической**, если для всех значений x, y выполняется равенство $f(x, y) = f(y, x)$.

Симметрической является, например, функция $f(x;y)=\sqrt{x^2-xy+y^2}-\dfrac{1}{x+y}$.

Важным примером симметрических функций являются симметрические многочлены $P(x, y)$ (для которых при всех значениях x, y выполняется равенство $P(x, y) = P(y, x)$).

Простейшими симметрическими многочленами считаются $x + y$ и xy.

В курсе высшей алгебры доказывается, что любой симметрический многочлен от переменных x, y можно представить как многочлен от новых переменных $u = x + y$, $v = xy$.

Например, $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$;
$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = u(u^2 - 2v - v) = u(u^2 - 3v) = u^3 - 3uv$;
$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (u^2 - 2v)^2 - 2v^2 = u^4 - 4u^2v + 2v^2$;
$x^3y^2 + x^2y^3 = x^2y^2(x + y) = uv^2$ и т.д.

Определение 2. Систему двух уравнений называют **симметрической**, если она имеет вид $\begin{cases} f_1(x,y)=0 \\ f_2(x,y)=0 \end{cases}$, где $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ – симметрические функции.

Мы будем рассматривать случай, когда симметрические функции являются многочленами.

Вернемся к решению системы, она является симметрической. Используем для ее решения замену $u = x + y$, $v = xy$. Чтобы сделать эту замену, преобразуем ее уравнения, выражая их левые части через простейшие симметрические многочлены $x + y$ и xy:

$$\begin{cases} xy+2x+2y-5=0 \\ x^2+y^2+3x+3y-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy+2(x+y)-5=0 \\ (x+y)^2-2xy+3(x+y)-8=0 \end{cases}$$

В результате замены имеем:

$$\begin{cases} v+2u-5=0 \\ u^2-2v+3u-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=5-2u \\ u^2-2(5-2u)+3u=8 \end{cases}$$

Второе уравнение системы сводится к квадратному $u^2 + 7u - 18 = 0$, которое имеет два корня: $u_1 = 2$, $u_2 = -9$.

Если $u = 2$, то $v = 1$; если $u = -9$, то $v = 5 - 2u = 23$.

Система распадается на две системы:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+y=-9 \\ xy=23 \end{cases}.$$

Если $x + y = 2$, $xy = 1$, то числа x, y по теореме, обратной теореме Виета, являются корнями уравнения $t^2 - 2t + 1 = 0$, то есть $x = y = 1$.

Если $x + y = -9$, $xy = 23$, то числа x, y являются корнями уравнения $t^2 + 9t + 23 = 0$, которое не имеет решений ($D < 0$).

Ответ: (1; 1).

Итак, после сделанной замены данная симметрическая система свелась к системе, вообще говоря, более простой, чем исходная. То же самое можно проделать и с любой другой симметрической системой.

Итак, для **решения симметрических систем** будем применять следующий способ:

1. Сделать замену $u = x + y$, $v = xy$.

2. Решить известными способами полученную систему относительно u и v.

3. Вернуться к «старым» неизвестным, указав значения $x + y$ и xy.

4. Воспользоваться теоремой, обратной теореме Виета, для нахождения x и y.

Рассмотрим решение симметрических систем с помощью указанного алгоритма.

Пример 1. Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+y^2-2x-2y+3xy=1 \\ 2x^2+2y^2-3x-3y+xy=-1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} (x^2-x)(y^2-y)=72 \\ (x+1)(y+1)=20 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x^4+y^4+x^2+y^2=92 \\ xy=3 \end{cases}$.

Решение.

Во всех системах делаем замену $u = x + y$, $v = xy$.

а) Имеем: $\begin{cases} u^2 - 2v - 2u + 3v = 1 \\ 2(u^2 - 2v) - 3u + v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - 2u + v = 1 \\ 2u^2 - 3u - 3v = -1 \end{cases}$.

Первое уравнение системы оставим без изменений, а ко второму прибавим утроенное первое и поставим на второе место. Получим равносильную систему

$$\begin{cases} v = 1 + 2u - u^2 \\ 5u^2 - 9u = 2 \end{cases}.$$

Квадратное уравнение $5u^2 - 9u - 2 = 0$ имеет два корня: $u_1 = 2$, $u_2 = -\frac{1}{5}$.

Если $u = 2$, то $v = 1 + 2u - u^2 = 1$; если $u = -\frac{1}{5}$, то $v = 1 + 2u - u^2 = \frac{14}{25}$.

Система распадается на две системы:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x + y = -\frac{1}{5} \\ xy = \frac{14}{25} \end{cases}.$$

Первая система имеет единственное решение (1;1) (см. решение предыдущей системы). Если $x + y = -\frac{1}{5}$, $xy = \frac{14}{25}$, то числа x, y являются корнями уравнения $t^2 + \frac{1}{5}t + \frac{14}{25} = 0$, которое не имеет решений ($D < 0$).

Ответ: (1; 1).

б) Запишем систему в виде $\begin{cases} x^2y^2 - xy(x + y) + xy = 72 \\ xy + x + y + 1 = 20 \end{cases}$.

После замены $u = x + y$, $v = xy$ получим: $\begin{cases} v^2 - uv + v = 72 \\ u + v = 19 \end{cases}$

Выразим из второго уравнения $u = 19 - v$ и подставим в первое; получим равносильную систему $\begin{cases} u = 19 - v \\ v^2 - v(19 - v) + v = 72 \end{cases}$.

Последнее уравнение приводится к квадратному:

$2v^2 - 18v = 72$, то есть $v^2 - 9v - 36 = 0$. Это уравнение имеет 2 корня: $v_1 = 12$, $v_2 = -3$. Если $v = 12$, то $u = 19 - v = 7$; если $v = -3$, то $u = 19 - v = 22$. Система распадается на две системы:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x + y = 22 \\ xy = -3 \end{cases}$$

Если $x + y = 7$, $xy = 12$, то числа x, y по теореме, обратной теореме Виета, являются корнями уравнения $t^2 - 7t + 12 = 0$, то есть $x = 3$, $y = 4$ или $x = 4$, $y = 3$.

Если $x + y = 22$, $xy = -3$, то числа x, y являются корнями уравнения $t^2 - 22t - 3 = 0$, то есть $t_{1,2} = 11 \pm \sqrt{124} = 11 \pm 2\sqrt{31}$.

Ответ: (3; 4), (4; 3), $\left(11 + 2\sqrt{31}; 11 - 2\sqrt{31}\right)$, $\left(11 - 2\sqrt{31}; 11 + 2\sqrt{31}\right)$.

в) В начале этого пункта мы показали, что:

$x^2 + y^2 = u^2 - 2v$, $x^4 + y^4 = u^4 - 4u^2v + 2v^2$.

Значит, после замены исходная система имеет вид

$$\begin{cases} u^4 - 4u^2v + 2v^2 + u^2 - 2v = 92 \\ v = 3 \end{cases}$$

Подставляя $v = 3$ в первое уравнение системы, получим биквадратное уравнение относительно u:

$u^4 - 12u^2 + 18 + u^2 - 6 = 92$, то есть $u^4 - 11u^2 - 80 = 0$.

Проведем повторную замену, обозначив $u^2 = t$. Получим квадратное уравнение $t^2 - 11t - 80 = 0$, которое имеет 2 корня: $t_1 = 16$, $t_2 = -5$. Так как $t = u^2 \geqslant 0$, то $t = 16$, значит, $u = \pm 4$. Система распадается на две системы:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y = -4 \\ xy = 3 \end{cases}.$$

Если $x + y = 4$, $xy = 3$, то числа x, y являются корнями уравнения $t^2 - 4t + 3 = 0$, то есть $x = 3$, $y = 1$ или $x = 1$, $y = 3$.

Если $x + y = -4$, $xy = 3$, то числа x, y являются корнями уравнения $t^2 + 4t + 3 = 0$, то есть $x = -3$, $y = -1$ или $x = -1$, $y = -3$.

Ответ: (3; 1), (1; 3), (−3; −1), (−1; −3).

К **350** 1) Замените в многочлене $x^2y + 3xy + xy^2$ переменную x переменной y, а переменную y переменной x. Что вы замечаете?

2) Будут ли обладать подобным свойством следующие многочлены:

а) $x^4 - 5x^3y + 3x^2y^2 - 5xy^3 + y^4 + x + y$; б) $(x^2 + y^2)^2 + x^4y + xy^4 + 3xy + 2x + 2y$?

Такие многочлены называют симметрическими. Приведите другие примеры симметрических многочленов.

351 Представьте данные симметрические многочлены, как многочлены от новых переменных u и v, обозначив $u = x + y$, $v = xy$.

а) $(x + y)^2 + xy$; б) $3(x + y) - 2xy$; в) $4x + 4y - 6xy$; г) $x^2y + xy^2$; д) $x^2 + y^2$.

352 Попробуйте решить симметрическую систему:

$$\begin{cases} xy + 2x + 2y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 + 3x + 3y - 8 = 0 \end{cases}.$$

Сопоставьте ход своего решения этой системы с решением на стр.106.

Каким образом удалось свести ее к более простой системе? Можно ли использовать этот прием при решении других симметрических систем? Сформулируйте способ решения подобных систем. Сопоставьте его с правилом, изложенным на стр. 106.

353 Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 31(x^3 + y^3) = 7(x^5 + y^5) \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}$.

П **354** Решите систему $\begin{cases} 2x^2 + xy - 2y^2 + 4 = 0 \\ 14x^2 + 9xy - 8y^2 = 0 \end{cases}$.

355 Округлите числа до указанного разряда:

а) 41 603 до десятков тысяч; в) 987 650 до сотен;

б) 120 132 до тысяч; г) 127 до десятков.

356 Округлите десятичные дроби до указанного разряда:

а) 41,603 до целых; в) 98,7015 до сотых;

б) 1,20132 до тысячных; г) 1,25 до десятых.

Д **357** Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+3xy+y^2=1 \\ x^2y+xy^2=6 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x^4+4x^3y+5x^2y^2+4x^3y+y^4=7 \\ x^2+3xy+y^2=1 \end{cases}$; в) $\begin{cases} xy(x+y)=30 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$.

358 Решите систему:

$$\begin{cases} 2x^2-3xy-y^2=0 \\ 4x^2+3xy-y^2=-6 \end{cases}.$$

359 Округлите числа до указанного разряда:

а) 123 456 до тысяч; в) 123,456 до сотых;

б) 123 456 до сотен; г) 123,456 до десятых.

С **360*** Решите систему уравнений $\begin{cases} (x^2+xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=185 \\ (x^2-xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=65 \end{cases}$.

§ 6. Приближенное решение уравнений

1. Приближенные вычисления. Абсолютная и относительная погрешность

Человек лишь там чего-то добивается, где он сам верит в свои силы.

Л. А. Фейербах (1804–1872), немецкий философ

На практике часто приходится иметь дело не с точными, а с *приближенными* значениями величин. Например, при измерениях различных величин при помощи физических приборов мы всегда получаем приближенные значения. При подсчете небольшого количества предметов получаются точные значения, а при подсчете большого количества — чаще всего приближенные.

Например, длина окружности земного экватора равна 40000 км — это приближенное значение, тем более, что экватор не является идеальной окружностью, а Земля не является идеальным шаром. Население Земли составляет $7 \cdot 10^9$ человек — это приближенное значение, тем более что пока мы пишем или читаем эту фразу, точное количество жителей Земли может измениться. А вот если мы скажем, что в нашем классе учится 28 человек, — это точное значение (если учащихся действительно 28).

Если в школе учится 1012 школьников, а мы приближенно считаем, что их 1000, то точное значение больше приближенного. Может быть и наоборот (точное значение меньше приближенного), если, например, в школе учится 985 школьников, а мы приближенно считаем, что их 1000.

В пятом классе мы работали с приближенными величинами, когда учились правилам округления числа с точностью до определенного разряда. Теперь мы уточним свои представления о приближениях. Для этого введем следующее определение.

Определение 1. Модуль разности между точным и приближенным значением величины называется **абсолютной погрешностью приближения:**

$$\Delta x = |x - \tilde{x}|,$$

где x – точное значение величины, $\tilde{x}$ – приближенное.

Для обозначения абсолютной погрешности используется символ Δx, который читается «дельта икс», где Δ – большая греческая буква «дельта» (заметим, что Δx – это не произведение $\Delta \cdot x$, а единый символ).

Рассмотрим примеры вычисления абсолютной погрешности приближений.

Пример 1. Определить абсолютную погрешность:

а) приближенного значения суммы внутренних углов треугольника ABC; если при измерении транспортиром получены следующие данные: $\angle A \approx 73^\circ$, $\angle B \approx 85^\circ$, $\angle C \approx 21^\circ$;

б) приближенного значения количества учеников, равного 1100, если в школе учится 1109 учеников;

в) абсолютный ноль температур равен $-273{,}15\ ^\circ C$; приближенно считаем его равным $-273\ ^\circ C$.

Решение.

а) Приближенное значение $\tilde{x} = 73^\circ + 85^\circ + 21^\circ = 179^\circ$. Как известно, точное значение суммы углов треугольника равно 180°, значит, $x = 180^\circ$.

Тогда абсолютная погрешность $\Delta x = |x - \tilde{x}| = |180^\circ - 179^\circ| = 1^\circ$.

б) $x = 1109$, $\tilde{x} = 1100$, $\Delta x = |x - \tilde{x}| = 9$.

в) $\tilde{t} = -273\ ^\circ C$; точное значение $t = -273{,}15^\circ$. Значит, абсолютная погрешность: $\Delta t = |t - \tilde{t}| = 0{,}15\ ^\circ C$.

В большинстве случаев (при измерениях или при подсчете очень большого количества предметов) точное значение величины определить невозможно. Соответственно, и значение абсолютной погрешности невозможно определить, его можно только оценить.

Пример 2. Оценить абсолютную погрешность приближенного значения величины в следующих случаях:

а) при измерении температуры тела показание термометра оказалось между $36{,}3^\circ$ и $36{,}4\ ^\circ C$; приближенно считаем, что $t \approx 36{,}35\ ^\circ C$;

б) возраст Земли по современным данным – от 4,6 до 4,7 млрд. лет; приближенно считаем, что он равен 4,5 млрд. лет.

Решение.

а) $t \approx 36{,}35\ ^\circ C$; точное значение t нам неизвестно, но так как $t \in (36{,}3^\circ; 36{,}4^\circ)$, то $\Delta t = |t - \tilde{t}| < 0{,}05^\circ$. Нам неизвестно точное значение абсолютной погрешности, но она составляет менее $0{,}05^\circ$, то есть оценивается *сверху* значением $0{,}05^\circ$.

б) $\tilde{x} = 4{,}5 \cdot 10^9$, $x \in (4{,}6 \cdot 10^9; 4{,}7 \cdot 10^9)$; ясно, что абсолютная погрешность $\Delta x = |x - \tilde{x}| < 0{,}2 \cdot 10^9 = 2 \cdot 10^8$.

Абсолютная погрешность далеко не всегда характеризует точность приближения. Измерить с точностью до 1 см рост человека или длину земельного участка – это разная точность. Измерить с точностью до 1 см длину экватора земного шара вообще невозможно (это недостижимая точность). А вот измерять с точностью до 1 см расстояние между молекулами вообще бессмысленно – ясно, что это расстояние настолько меньше 1 см, что с такой абсолютной погрешностью приближенное значение можно принять равным 0.

Для характеристики *точности приближения* применяют относительную погрешность, показывающую, какую долю абсолютная погрешность составляет от приближенной величины.

Определение 2. Отношение абсолютной погрешности к модулю приближенного значения величины называется **относительной погрешностью**:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|\tilde{x}|}, \text{ где } \tilde{x} \neq 0.$$

Для обозначения относительной погрешности используется символ δx, где δ – малая греческая буква «дельта» (δx опять-таки не произведение, а единый символ).

Если $\tilde{x} = 0$, то значение δx теряет смысл. Практический смысл имеют только случаи, когда относительная погрешность значительно меньше 1, поэтому ее удобнее указывать в процентах.

Пример 3. Для пунктов а) и б) примера 1 и пункта б) примера 2 оценить относительную погрешность измерения.

Решение.

1а) Так как $\Delta x = 1^\circ$, а $\tilde{x} = 179^\circ$, то $\delta x = \dfrac{\Delta x}{|\tilde{x}|} = \dfrac{1^\circ}{179^\circ} \approx 5{,}6 \cdot 10^{-3} = 0{,}56\%$.

1б) $\delta x = \dfrac{9}{1100} \approx 8{,}2 \cdot 10^{-3} = 0{,}82\%$.

2б) $\delta x < \dfrac{0{,}2 \cdot 10^9}{4{,}5 \cdot 10^9} \approx 0{,}044 = 4{,}4\%$.

При вычислении абсолютной погрешности не следует гнаться за большой точностью, достаточно двух значащих цифр. Более точные значения все равно не несут дополнительной информации.

Результат приближенного вычисления часто записывается в виде $x = \tilde{x} \pm \Delta x$ или $x = \tilde{x} \pm \delta x \cdot \tilde{x} = \tilde{x}\,(1 \pm \delta x)$, например, в рассмотренном нами случае измерения температуры тела:

$$t = 36{,}35^\circ \pm 0{,}05.$$

Во всех остальных рассмотренных нами случаях приближенное значение, несомненно, больше или меньше истинного, и такая запись теоретически допустима, но на практике теряет смысл.

В качестве еще одного примера приближения приведем знакомое нам округление десятичной дроби до некоторого разряда, скажем, до третьего разряда после запятой. Остальные разряды могут быть просто ненужными (нет необходимости в такой точности) или вызывающими сомнение из-за неточности измерений. Если все «ненужные» разряды числа x отбросить, а нужные оставить без изменения, то, как мы знаем, получается **округление с недостатком (приближенное значение с недостатком** обычно обозначают $\underline{x}$, используя нижнее подчеркивание). Если последний «нужный» разряд увеличить на 1, то получается **округление с избытком (приближенное значение с избытком** обозначают $\bar{x}$, с верхним подчеркиванием).

Пример 4. Округлить число $\pi = 3{,}1415926...$ до третьего разряда после запятой с недостатком и с избытком. Какое округление будет более точным?

Решение.

«Нужными» являются первые три разряда после запятой. Приближенное значение с недостатком $\underline{\pi} = 3{,}141$. Приближенное значение с избытком $\bar{\pi} = 3{,}142$. Абсолютная погрешность приближения с недостатком $|\pi - \underline{\pi}| = 0{,}0005926...$ Абсолютная погрешность приближения с избытком $|\bar{\pi} - \pi| = 0{,}0004073...$ Приближение с избытком является более точным (рассматривать относительные погрешности здесь не имеет смысла, так как приближенные значения очень мало отличаются).

Из этого примера ясно, почему известные нам правила округления именно такие. Если первый отбрасываемый разряд содержит цифру, меньшую 5, то более точным является приближение с недостатком, и в этих случаях мы проводим округление с недостатком. Если первый отбрасываемый разряд содержит цифру, большую или равную 5, то более точным является приближение с избытком, и в этих случаях округление производится с избытком. Особым является случай, когда нужно отбросить всего один разряд и он содержит цифру 5. Тогда приближения с недостатком и с избытком одинаково точны (абсолютная погрешность равна пяти единицам отбрасываемого разряда). Так исторически сложилось, что в этом случае принято делать приближение с избытком. Скорее всего, это сделано с целью упростить алгоритм округления: «если пятерка и более, то нужно округлять вверх» и не делать различий между ситуациями, когда после пятерки ничего нет и когда после нее есть какие-нибудь еще цифры.

К **361** Прочитайте следующие предложения:

а) В течение XX века численность населения мира выросла от 1,65 до 6 миллиардов.

б) Несмотря на огромную роль лесов, каждую минуту на нашей планете вырубается от 14 до 20 га леса.

в) С начала XVII по конец XX в. с лица земли исчезло 68 видов млекопитающих, 130 видов птиц, 28 видов рептилий, 6 видов рыбы и 6 видов амфибий.

Можно ли считать указанные числа точными значениями данных величин? Поясните свой ответ. Как называют такие данные?

362 1) Округлите числа 1,234 и 5,678 с точностью до второго знака после запятой. Вычислите, на сколько приближенное значение отличается от точного? Какое из приближенных значений оказалось ближе к точному?

2) Какие выводы позволяют сделать найденные вами значения? Как бы вы назвали найденные вами показатели? Познакомьтесь с общепринятым названием этой величины на стр.110.

363 1) Сообщая родителям о своих затратах на поход в театр, Саша описал их приближенно: билет в театр стоил приблизительно 1000 рублей, а букет цветов около 200 рублей. На самом деле цена билета составляла 950 рублей, а цена цветов – 250 рублей.

Перечертите и заполните таблицу:

	Приблизительное значение	Точное значение	Абсолютная погрешность
Билет			
Букет			

Можно ли сказать, что, округляя цену билета и цену букета, он сделал одинаковое по точности приближение? В каком случае приближение было более точным?

2) Всегда ли абсолютная погрешность позволяет судить о точности приближения? Предположите, как еще можно оценить точность приближения? Познакомьтесь еще с одной характеристикой точности приближения.

364 Определите абсолютную погрешность:

а) приближенного значения суммы внутренних углов четырехугольника $ABCD$, если при измерении транспортиром получены следующие данные: $\angle A \approx 53^\circ$; $\angle B \approx 65^\circ$; $\angle C \approx 121^\circ$; $\angle D \approx 126^\circ$;

б) приближенного значения количества слушателей концерта, равного 5000, если в действительности их было 4895;

в) точный рост Вани Петрова — 1 метр и 67 сантиметров; он приближенно считает его равным 1,7 метра.

365 Оцените абсолютную погрешность приближенного значения величины в следующих случаях:

а) в справочнике указано, что число Авогадро приблизительно равно $6{,}022 \cdot 10^{23}$;

б) зал кинотеатра вмещает 200 человек, известно, что при просмотре фильма было занято больше половины мест; приближенно считаем, что в зале 150 человек.

366 Для двух предыдущих задач оцените (в процентах) относительную погрешность измерения.

П **367** Решите симметрическую систему уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases}(x^2+y^2)(x^3+y^3)=32\\ x+y=2\end{cases}.$$

368 Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases}7x+24y=65\\ \dfrac{3}{4x+13}-\dfrac{1}{y}=0\end{cases}$; б) $\begin{cases}|y-10|-|x+6|=10\\ \dfrac{y-30}{x-4}=2\end{cases}$.

Д **369** В аудитории 20 рядов по 20 мест в каждом, преподаватель заметил, что каждый ряд заполнен примерно на половину и оценил количество студентов как $10 \cdot 20 = 200$; а его ассистент посчитал точное количество, равное 217 человек. Определите абсолютную погрешность приближения.

370 В справочнике указано, что масса электрона приблизительно равна $9{,}1 \cdot 10^{-28}$ граммов. Оцените абсолютную погрешность этого приближенного значения.

371 Для двух предыдущих задач оцените (в процентах) относительную погрешность измерения.

372 Покупатель в супермаркете, для того чтобы не купить товара на сумму большую, чем у него есть в кошельке, считает стоимость своей покупки. Чтобы было проще считать, он округляет стоимость каждого товара до ближайшего большего числа кратного 50. Оценить абсолютную и относительную погрешность приближенного значения, если стоимость его покупок: 30,25; 79,89; 109,99; 271,10; 314,15; 521,14 и 951,10 рублей.

373 Решите симметрическую систему уравнений с двумя неизвестными:

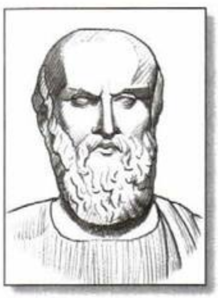
$$\begin{cases} xy\left(x^2+y^2\right)=10 \\ x+y=3 \end{cases}.$$

374 Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} 15x+11y=74 \\ \dfrac{5}{8x-11}=\dfrac{4}{y} \end{cases}$; б) $\begin{cases} |2x+1|+|y-2|=4 \\ \dfrac{y+0,4}{x+1,3}=3 \end{cases}$.

C **375*** Найдите все n, для которых выполняется равенство $\dfrac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n^3-1}{n^3+1}=\dfrac{37}{55}$.

2.* Погрешность суммы, разности, произведения и частного



Мудр не тот, кто знает много,
а тот, чьи знания полезны.

Эсхил (525–456 г. до н.э.),
древнегреческий драматург

Иногда на практике нам требуется работать с несколькими приближенными величинами и даже производить с ними вычисления. Интересно оценить точность полученных при этом приближенных значений, можно ли им доверять или полученное значение будет настолько неточным, что и оперировать им не имеет смысла. Для того чтобы понимать, что происходит при работе с приближенными значениями величин, нужно уметь оценивать погрешность суммы, разности, произведения и частного приближенных значений. В этом пункте мы научимся проводить такие оценки.

Если известны абсолютные погрешности приближенных значений двух величин, то абсолютная погрешность их суммы или разности находится как сумма их абсолютных погрешностей.

Теорема 1. Если Δx — абсолютная погрешность приближенного значения $\tilde{x}$ величины x, а Δy — абсолютная погрешность приближенного значения $\tilde{y}$ величины y, то абсолютная погрешность $\Delta(x+y)$ приближенного значения $\tilde{x}+\tilde{y}$ величины $x+y$ не превосходит $\Delta x+\Delta y$; абсолютная погрешность $\Delta(x-y)$ приближенного значения $\tilde{x}-\tilde{y}$ величины $x-y$ не превосходит $\Delta x+\Delta y$.

Доказательство.

$\Delta x=|x-\tilde{x}|$; $\Delta y=|y-\tilde{y}|$. Абсолютная погрешность суммы

$\Delta(x+y)=|(x+y)-(\tilde{x}+\tilde{y})|=|(x-\tilde{x})+(y-\tilde{y})|\leqslant|x-\tilde{x}|+|y-\tilde{y}|=\Delta x+\Delta y$;

абсолютная погрешность разности

$\Delta(x-y) = |(x-y)-(\tilde{x}-\tilde{y})| = |(x-\tilde{x})-(y-\tilde{y})| \leqslant |x-\tilde{x}| + |y-\tilde{y}| = \Delta x + \Delta y$. ■

Для произведения и частного двух величин складываются уже не абсолютные, а относительные погрешности.

* * *

Теорема 2. Если δx – относительная погрешность приближенного значения $\tilde{x}$ величины x, а δy – относительная погрешность приближенного значения $\tilde{y}$ величины y ($\tilde{x} \neq 0$, $\tilde{y} \neq 0$), то относительная погрешность $\delta(xy)$ приближенного значения $\tilde{x} \cdot \tilde{y}$ величины xy не превосходит $\delta x + \delta y + \delta x \cdot \delta y$; относительная погрешность $\delta\left(\frac{x}{y}\right)$ приближенного значения $\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}$ величины $\frac{x}{y}$ не превосходит $\frac{\delta x + \delta y}{|1-\delta y|}$.

Доказательство.

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|\tilde{x}|} = \frac{|x-\tilde{x}|}{|\tilde{x}|};\ \delta y = \frac{\Delta y}{|\tilde{y}|} = \frac{|y-\tilde{y}|}{|\tilde{y}|}.$$

Относительная погрешность произведения

$$\delta(xy) = \frac{|xy-\tilde{x}\tilde{y}|}{|\tilde{x}\tilde{y}|} = \frac{|xy-\tilde{x}y+\tilde{x}y-\tilde{x}\tilde{y}|}{|\tilde{x}\tilde{y}|} = \frac{|y(x-\tilde{x})+\tilde{x}(y-\tilde{y})|}{|\tilde{x}\tilde{y}|} \leqslant \frac{|y(x-\tilde{x})|+|\tilde{x}(y-\tilde{y})|}{|\tilde{x}\tilde{y}|} =$$

$$= \frac{|y|}{|\tilde{y}|} \cdot \frac{|x-\tilde{x}|}{|\tilde{x}|} + \frac{|y-\tilde{y}|}{|\tilde{y}|} = \frac{|y-\tilde{y}+\tilde{y}|}{|\tilde{y}|} \cdot \delta x + \delta y \leqslant \frac{|y-\tilde{y}|+|\tilde{y}|}{|\tilde{y}|} \cdot \delta x + \delta y = (\delta y + 1) \cdot \delta x + \delta y = \delta x + \delta y + \delta x \cdot \delta y.$$

Относительная погрешность частного

$$\delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\left|\frac{x}{y} - \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right|}{\left|\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right|} = \frac{|x\tilde{y}-y\tilde{x}|}{|\tilde{x}y|} = \frac{|x\tilde{y}-\tilde{x}\tilde{y}+\tilde{x}\tilde{y}-y\tilde{x}|}{|\tilde{x}y|} = \frac{|\tilde{y}(x-\tilde{x})+\tilde{x}(\tilde{y}-y)|}{|\tilde{x}|\cdot|y|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\tilde{y}|}{|y|} \cdot \frac{|x-\tilde{x}|}{|\tilde{x}|} + \frac{|\tilde{x}|\cdot|\tilde{y}-y|}{|\tilde{x}||\tilde{y}|} \cdot \frac{|\tilde{y}|}{|y|} = \frac{|\tilde{y}|}{|y|} \cdot (\delta x + \delta y) = \frac{\delta x + \delta y}{\frac{|y-\tilde{y}+\tilde{y}|}{|\tilde{y}|}}.$$

Но для любых чисел $a, b \in \boldsymbol{R}$ выполняется неравенство $|a+b| \geqslant ||a|-|b||$, поэтому

$$\delta\left(\frac{x}{y}\right) \leqslant \frac{\delta x + \delta y}{\frac{||\tilde{y}|-|y-\tilde{y}||}{|\tilde{y}|}} = \frac{\delta x + \delta y}{\left|1 - \frac{|y-\tilde{y}|}{|\tilde{y}|}\right|} = \frac{\delta x + \delta y}{|1-\delta y|}. \ ■$$

На практике всегда значение $\delta y < 1$, более того, $\delta y << 1$ (этот знак означает *значительно меньше*). Поэтому знаменатель последней дроби можно считать приближенно равным 1, и $\delta\left(\frac{x}{y}\right) \leqslant \delta x + \delta y$.

Если $\delta x << 1$ и $\delta y << 1$, то величина $\delta x \cdot \delta y$ значительно меньше δx и δy, поэтому слагаемым $\delta x \cdot \delta y$ в оценке для $\delta(xy)$ можно пренебречь, и $\delta(xy) \leqslant \delta x + \delta y$.

Далее, так как $\delta(x^2) = \delta(x \cdot x) \leqslant \delta x + \delta x$, то $\delta(x^2) \leqslant 2\delta x$. Аналогично $\delta(x^3) \leqslant 3\delta x$ и вообще для любого натурального n имеет место оценка $\delta(x^n) \leqslant n\delta x$. Строго это неравенство можно доказать методом математической индукции.

Также легко видеть, что $\delta\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \delta x$. Это следует из неравенства $\delta\left(\frac{y}{x}\right) \leqslant \delta y + \delta x$, а также из того факта, что погрешность для постоянной величины 1 (как абсолютная, так и относительная) равна 0. Поэтому для любого натурального n также $\delta\left(\dfrac{1}{x^n}\right) \leqslant n\delta x$.

Если постоянная ненулевая величина C определяется точно (целое число или рациональное число в виде отношения двух целых чисел), то $\tilde{C} = C$; $\Delta C = 0$; $\delta C = 0$. Поэтому $\delta(Cx) \leqslant \dfrac{|Cx - C\tilde{x}|}{|C\tilde{x}|} = \dfrac{|x-\tilde{x}|}{|\tilde{x}|} = \delta x$ (относительная погрешность $\delta(Cx)$ приближенного значения величины Cx равна относительной погрешности приближения $\tilde{x}$ величины x).

Итак, **при вычислениях с приближенными значениями $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$:**

- абсолютные погрешности их **суммы** и **разности** можно оценить сверху через $\Delta x + \Delta y$;
- относительные погрешности их **произведения** и **частного** можно оценить сверху через $\delta x + \delta y$;
- относительные погрешности **степени** $(\tilde{x})^n$ и **обратной ей величины** можно оценить сверху через $n\delta x$;
- относительную погрешность **произведения $\tilde{x}$ на некоторое точное значение C** можно оценить сверху через δx.

Отметим еще раз, что второе и третье утверждения верны только в случае малых погрешностей ($\delta x << 1$ и $\delta y << 1$).

Отметим также, что относительная погрешность — безразмерная величина; при нахождении относительной погрешности произведения и частного не имеет значения, в каких единицах измеряются компоненты этого произведения или частного.

Пример 1. Путь, пройденный материальной точкой при свободном падении с нулевой начальной скоростью при отсутствии сопротивления воздуха без учета вращения Земли равен $S = \dfrac{gt^2}{2}$, где g — ускорение свободного падения на данной широте, t — время падения. Вычислить приближенно расстояние, пройденное в таких условиях тяжелым шариком небольшого размера, и оцените погрешность, если $g = (9{,}80 \pm 0{,}01)$ м/с^2, $t = (12 \pm 0,1)$ с.

Решение.

Приближенное значение $\tilde{S} = \dfrac{\tilde{g}\tilde{t}^2}{2} = \dfrac{9{,}80 \cdot 12^2}{2} = 705{,}6$ м. Относительная погрешность этого приближенного значения $\delta S \leqslant \delta g + 2\delta t$, где $\delta g = \dfrac{0,01}{9,80} \approx 1,0 \cdot 10^{-3}$; $\delta t = \dfrac{0,1}{12} \approx 8,3 \cdot 10^{-3}$. Тогда $\delta S \leqslant 1{,}0 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 8{,}3 \cdot 10^{-3} = 1{,}76 \cdot 10^{-2} \approx 1{,}8 \cdot 10^{-2}$. Имеем далее: $\Delta S = |\tilde{S}| \cdot \delta S = 705{,}6 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-2} \approx 12{,}7$.

Итак, $S = (705{,}6 \pm 12{,}7)$ м.

На практике грамотнее писать так: $S = (706 \pm 13)$ м. Писать ответ с точностью до десятых, когда ошибка порядка 10, – бессмысленно.

Абсолютная погрешность имеет размерность той величины, для которой рассматривается приближение. Если $n \in \boldsymbol{Z}$, то $\Delta(xn) = \Delta(x + ... + x) = \Delta x + ... + \Delta x = n\Delta x$.

Пример 2. Автомобиль движется со скоростью $v = (60 \pm 1)$ км/ч. Затем дважды за промежутки времени $t = (1 \pm 0{,}05)$ с ему сообщалось в направлении движения ускорение $a = (1{,}5 \pm 0{,}1)$ м/с^2. Вычислить приближенно окончательную скорость автомобиля и оценить погрешность.

Решение.

После каждого из двух ускорений скорость автомобиля приближенно увеличивалась на величину $\tilde{u} = \tilde{a} \cdot \tilde{t} = 1{,}5$ м/с. При этом $\Delta u = |\,\tilde{u}\,| \cdot \delta u$; $\delta u = \delta a + \delta t$; $\delta a = \dfrac{0{,}1}{1{,}5} \approx 0{,}067$;

$\delta t = \dfrac{0{,}05}{1} = 0{,}05$; $\delta u = 0{,}067 + 0{,}05 \approx 0{,}12$; $\Delta u \approx 1{,}5 \cdot 0{,}12 = 0{,}18$ м/с. Итак, $u = (1{,}5 \pm 0{,}18)$ м/с. Так как 1 м/с = 3,6 км/ч, то $u = (1{,}5 \pm 0{,}18) \cdot 3{,}6 \approx (5{,}4 \pm 0{,}65)$ км/ч.

Так как окончательная скорость автомобиля вычисляется по формуле $v_1 = v + 2u$, то $\tilde{v}_1 = \tilde{v} + 2\tilde{u} = 60 + 2 \cdot 5{,}4 = 70{,}8$ км/ч.

Тогда $\Delta v_1 = \Delta v + 2\Delta u = 1 + 2 \cdot 0{,}65 = 2{,}3$ км/ч.

Итак, $v_1 = (70{,}8 \pm 2{,}3)$ км/ч; относительная погрешность $\delta v_1 = \dfrac{2{,}3}{70{,}8} \approx 3\%$.

К **376** 1) Аня купила платье и туфли на распродаже. После покупки она решила посчитать, какую сумму ей удалось сэкономить за счет скидок. Разницу между начальной ценой и ценой со скидкой она округляла до сотен. Заполните таблицу:

	Начальная цена (руб.)	Цена со скидкой (руб.)	Точное значение разницы	Приближенное значение разницы	Δx
Платье	1200	760			
Туфли	400	170			
Вся покупка					

2) Что вы замечаете? Можно ли обобщить эти наблюдения для оценки точности суммы любых приближенных значений? Как, зная абсолютные погрешности каждой из приближенных величин, найти абсолютную погрешность их суммы? Сопоставьте свое предположение с теоремой 1.

3) Познакомьтесь со способами оценки разности, произведения и частного приближенных значений.

377 Для вычисления площади прямоугольного участка фермер использовал рулетку длиной три метра. Длина одной стороны оказалась равной 3 + 3 + 3 + 2,7 метра, а другой 3 + 3 + 3 + 3 + 1,4 метра. Считая, что каждое измерение делается с абсолютной погрешностью не более 10 см, вычислите приближенно площадь участка и оцените абсолютную погрешность ответа.

П **378** Произведение первого и пятого членов геометрической прогрессии (b_n) равно 12. Частное от деления второго члена на четвертый равно 3. Найдите второй член прогрессии.

379 Второй член геометрической прогрессии составляет 110% от ее первого члена. Сколько процентов составляет ее шестой член от четвертого?

380 Вычислив значение $\sqrt[3]{10}$ с помощью калькулятора, Борис получил значение, равное 2,1544346900 (калькулятор отображал десять цифр после запятой). Для дальнейших расчетов Борис округлил это число: а) до пяти знаков после запятой; б) до семи знаков после запятой. Найдите абсолютную и относительную погрешности каждого приближения.

D **381** Для вычисления объема аквариума прямоугольной формы Вася использовал десятисантиметровую линейку. Длина одной стороны оказалась равной $10+10+10+4$ см, другой — $10+10+7$ см, а третьей — $10+10+10+10+2$ см. Считая, что каждое измерение делается с абсолютной погрешностью не более 5 мм, вычислите приближенно объем аквариума и оцените абсолютную погрешность ответа.

382 Вычислив значение $\sqrt[3]{50}$ с помощью калькулятора, Борис получил значение, равное 3,6840314986 (калькулятор отображал десять цифр после запятой). Для дальнейших расчетов Борис округлил это число: а) до трех знаков после запятой; б) до семи знаков после запятой. Найдите абсолютную и относительную погрешности каждого приближения.

383 Произведение третьего и четвертого членов геометрической прогрессии (b_n) равно 27. Частное от деления девятнадцатого члена на семнадцатый равно 9. Найдите второй член прогрессии.

384 Второй член геометрической прогрессии составляет 20% от ее первого члена. Сколько процентов составляет ее пятый член от третьего?

C **385*** Положительные числа a и b таковы, что числа $\frac{a^2+b^2}{a+b}$, $\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$ и $\frac{a^4+b^4}{a^3+b^3}$ образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Докажите, что $a=b$.

3.* Приближенное решение уравнений

Успеха может достичь любой.
Надо все время повторять себе эти слова,
верить, и успех придет.

Джон Леннон (1940–1980),
британский рок-музыкант, певец, поэт, композитор,
художник, писатель, один из основателей
и участник группы «The Beatles»

Как мы уже знаем, корни алгебраических уравнений высоких степеней не всегда выражаются через радикалы. В этом пункте мы будем учиться искать приближенные решения уравнений.

Один из наиболее распространенных методов приближенного решения уравнений (и не только алгебраических) — метод половинного деления. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ (что это значит — мы пока не определяем аккуратно, а понимаем на интуитивном уровне[5]), причем в точках a и b функция принимает значения разного знака, то на интервале $(a; b)$ найдется точка c, в которой $f(c) = 0$. В этом состоит одна из наиболее важных теорем математического анализа – теорема Больцано-Коши.

[5] На данный момент отметим только, что все основные изученные нами функции являются непрерывными на любом отрезке, принадлежащим их области определения. Исключение составляют только некоторые кусочно-заданные функции.

Интуитивно это утверждение вполне понятно и естественно. Доказывать мы его не будем, так как не владеем нужным математическим аппаратом.

Если функция $f(x)$ строго монотонна на отрезке $[a; b]$ (как на рис. 1), то эта точка единственна. А этот факт нам под силу доказать.

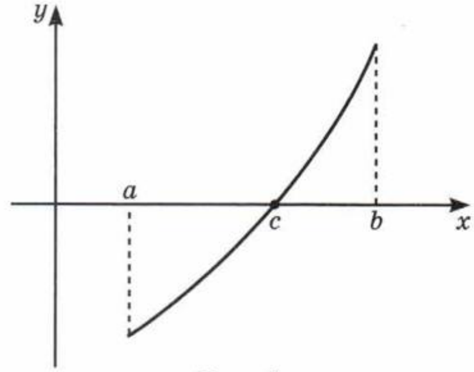


Рис. 1

Доказательство.

В самом деле, если, для определенности, $f(x)$ строго возрастает на $[a; b]$ и $f(c) = 0$, $c \in (a; b)$, то при $x > c$ выполняется неравенство $f(x) > f(c)$, то есть $f(x) > 0$, а при $x < c$ выполняется неравенство $f(x) < f(c)$, то есть $f(x) < 0$.

Итак, c — единственная точка на $[a; b]$, где $f(x) = 0$. ■

Метод половинного деления для нахождения приближенного решения уравнения $f(x) = 0$ состоит в следующем. Пусть $[a; b]$ — отрезок, на котором функция непрерывна и строго монотонна, причем в концах a и b функция принимает значения разных знаков. Тогда рассмотрим точку $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$ — середину отрезка. Если $f(x_1) = 0$, то найден (единственный!) корень уравнения. Если $f(x_1) \neq 0$, то из двух отрезков $[a; x_1]$ и $[x_1; b]$ выберем тот, на концах которого знаки функции по-прежнему разные (из двух образовавшихся отрезков такой — один). Этот отрезок снова делим пополам; x_2 — его середина. Если $f(x_2) = 0$, то корень найден. Если $f(x_2) \neq 0$, то из двух образовавшихся отрезков выберем тот, на концах которого знаки функции по-прежнему разные, и т.д. Если на каком-то n-м шаге $f(x_n) = 0$, то корень уравнения $f(x) = 0$ найден. Если нет, то получим бесконечную последовательность выбранных нами отрезков, каждый следующий из которых лежит в предыдущем и равен его половине. Можно доказать, что существует единственная точка c, принадлежащая всем этим отрезкам, и $f(c) = 0$.

Но мы остановимся на некотором шаге. Предположим, что нас интересует приближенное значение корня с абсолютной погрешностью не больше Δ (см. рис. 2). Тогда процесс половинного деления оборвем на том шаге, где длина соответствующего отрезка станет не больше 2Δ. Ясно, что если c — истинное, а $\tilde{c}$ — приближенное значение корня (середина соответствующего отрезка), то $|c - \tilde{c}| \leqslant \Delta$.

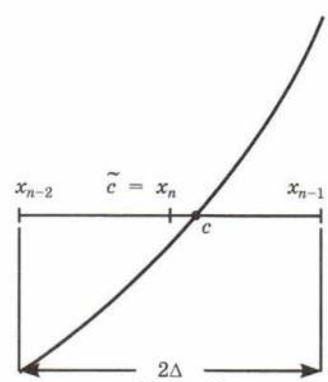


Рис. 2

Пример 1. Найти корень уравнения $x^3 + x + 1 = 0$ с точностью (абсолютной погрешностью) 0,01 и доказать, что этот корень единственен на $(-\infty; +\infty)$.

Решение.

Функция, стоящая в левой части уравнения $f(x) = x^3 + x + 1$, — строго возрастающая функция на всей числовой прямой (функции x^3 и $x + 1$ строго возрастают, а $f(x)$ — их сумма). Значит, уравнение $x^3 + x + 1 = 0$ не может иметь более одного корня. Так как $f(0) = 1 > 0$, а $f(-1) = -1 < 0$, то уравнение имеет корень на интервале $(-1; 0)$; в силу строгого возрастания f этот корень единственен.

Применим процесс половинного деления к отрезку $[-1; 0]$. Так как нам нужно найти значение корня c с точностью до $\Delta = 0{,}01$, то делить пополам отрезок нужно до тех пор, пока длина соответствующего отрезка не станет меньше $2\Delta = 0{,}02$.

1-й шаг: $x_1 = -0,5$; $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} + 1 = \underline{0,375 > 0}$.

Первый отрезок «половинного деления»: $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$; его длина равна 0,5.

2-й шаг: $x_2 = -\frac{3}{4} = -0,75$; $f\left(-\frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{3}{4}\right)^3 - \frac{3}{4} + 1 \approx \underline{-0,1719 < 0}$.

Второй отрезок: $\left[-\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}\right]$; его длина равна 0,25.

3-й шаг: $x_3 = -\frac{5}{8} = -0,625$; $f\left(-\frac{5}{8}\right) = -0,625^3 - 0,625 + 1 \approx \underline{0,1309 > 0}$.

Третий отрезок: $\left[-\frac{3}{4}; -\frac{5}{8}\right]$; его длина равна 0,125.

4-й шаг: $x_4 = -\frac{11}{16} = -0,6875$; $f(-0,6875) = -0,6875^3 - 0,6875 + 1 \approx \underline{-0,0125 < 0}$.

Четвертый отрезок: $\left[-\frac{11}{16}; -\frac{5}{8}\right]$; его длина равна $\frac{1}{16}$.

5-й шаг: $x_5 = -\frac{21}{32} = -0,65625$; $f(-0,65625) = -0,65625^3 - 0,65625 + 1 \approx \underline{0,06113 > 0}$.

Пятый отрезок: $\left[-\frac{11}{16}; -\frac{21}{32}\right]$; его длина равна $\frac{1}{32}$.

6-й шаг: $x_6 = -\frac{43}{64} = -0,671875$;

$f(-0,671875) = -0,671875^3 - 0,671875 + 1 \approx 0,02483 > 0$.

Шестой отрезок: $\left[-\frac{11}{64}; -\frac{43}{64}\right]$; его длина равна $\frac{1}{64} < \frac{1}{50} < 0,02$.

Нужная точность достигнута. Искомым значением корня уравнения с точностью до 0,01 является середина 6-го отрезка – точка $x_7 = c = -\frac{87}{128} \approx -0,67969$. Так как приближенное значение корня нам нужно с точностью до 0,01, то округляем это значение до двух разрядов после запятой: $c \approx -0,68$ (не зря мы брали в промежуточных вычислениях большее число знаков после запятой – чтобы не было проблем с округлением).

Кстати, $f(c) = -0,68^3 - 0,68 + 1 = 0,005568$; это число ближе к 0, чем значение функции во всех промежуточных точках. ■

Легко видеть, что для нахождения приближенного значения корня с точностью до 0,001 нужно продолжать процесс половинного деления до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше $2\Delta = \frac{1}{500}$. Это имеет место для 9-го отрезка, так как его длина равна $\frac{1}{2^9} = \frac{1}{512} < 2\Delta$; искомым приближенным значением корня будет $c = x_{10}$.

Если уравнение $f(x) = 0$ имеет более одного корня, то их нужно «отделить» – разбить область определения на отрезки, на каждом из которых уравнение имеет ровно один корень, и к каждому из них применить метод половинного деления.

Рассмотрим, например, уравнение $x^3 - 3x + 1 = 0$. Легко видеть, что $f(0) = 1$, $f(1) = -1$, $f(2) = 3$, $f(-2) = -1$. Поэтому существует три отрезка $[-2; 0]$, $[0; 1]$ и $[1; 2]$, на концах каждого из которых функция принимает значения разных знаков. Применяя к каждому из этих отрезков процесс половинного деления, найдем с нужной точностью три корня исходного уравнения. А больше трех корней уравнение 3-й степени иметь не может (многочлен, имеющий 4 корня x_1, x_2, x_3, x_4, имеет в своем разложении на множители по крайней мере 4 множителя: $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$, и его степень не меньше, чем 4).

К **386** Найдите положительный корень уравнения $x^2 - 3x - 5 = 0$ с точностью (абсолютной погрешностью) 0,1.

387 Найдите корень уравнения $5 - x^3 - 2x = 0$ с точностью (абсолютной погрешностью) 0,1 и докажите, что этот корень единственен на $(-\infty;+\infty)$.

П **388** Докажите, что последовательность (b_n) является геометрической прогрессией, если $b_n = 3 \cdot 2^n$. Найдите первый член этой прогрессии.

389 В геометрической прогрессии $b_2 = \sqrt[7]{2^6}$, $b_3 = 2$. Найдите $\frac{S_{14}}{S_7}$.

390 Найдите пятый член геометрической прогрессии (y_n), если третий ее член равен $2\sqrt{2}-6$, а четвертый $4-6\sqrt{2}$.

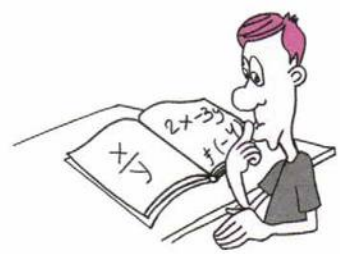
Д **391** Найдите отрицательный корень уравнения $2x^2 - x - 7 = 0$ с точностью (абсолютной погрешностью) 0,1.

392 Найдите корень уравнения $2x^3 + 5x + 1 = 0$ с точностью (абсолютной погрешностью) 0,1 и докажите, что этот корень единственен на $(-\infty;+\infty)$.

393 Докажите, что последовательность (y_n) является геометрической прогрессией, если $y_n = 6 \cdot (-3)^n$. Найдите первый член этой прогрессии.

394 В геометрической прогрессии $b_3 = 3$, $b_4 = \sqrt[9]{3^{10}}$. Найдите $\frac{S_9}{S_{18}}$.

С **395*** Найдите все такие пары действительных чисел x и y ($y \neq 0$), что числа $x+\frac{1}{y}$, $2x+\frac{1}{y^2}$ и $3x+\frac{1}{y^3}$ являются последовательными натуральными числами (именно в этом порядке).



Экспресс-тест № 8

Примерное время выполнения – 60 минут

Часть А

№ 1

№ 1. Решите систему:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 6 \end{cases}.$$

А) $(-2; -3)$, $(3; 2)$; Б) $(2; 3)$, $(-3; -2)$; В) $(-2; 3)$, $(-3; 2)$; Г) $(3; 2)$.

№ 2

№ 2. Решите систему:

$$\begin{cases} 2x + xy + 2 = 0 \\ 4x + 3xy + 30 = 0 \end{cases}.$$

А) $\left(12;\ 2\frac{1}{6}\right)$; Б) $\left(12;\ -2\frac{1}{6}\right)$; В) $\left(-12;\ 1\frac{5}{6}\right)$; Г) $\left(-12;\ -1\frac{5}{6}\right)$.

№ 3

№ 3. Решите систему:

$$\begin{cases} \dfrac{8}{2x-y} - \dfrac{3}{x+2y} = 1 \\ \dfrac{2}{2x-y} + \dfrac{1}{x+2y} = 2 \end{cases}.$$

А) (0; 1); Б) (–1; 0); В) (1; 0); Г) (–1; 0), (1; 0).

№ 4

№ 4. Округлите число 3,06 до десятых. Чему равна абсолютная погрешность этого приближения?

А) –0,04; Б) 0,06; В) 0,4; Г) 0,04.

Часть В

№ 5

№ 5. При взвешивании товара на кассе было получено значение массы, равное 1 кг. При взвешивании на контрольных весах было получено точное значение массы товара – 990 г. Найдите относительную погрешность взвешивания на кассе.

А) 1% ; Б) 10% ; В) 0,01% ; Г) 10% .

№ 6

№ 6. Решите систему с полным однородным уравнением второй степени:

$$\begin{cases} x^2 + xy - 6y^2 = 0 \\ 2x^2 + 4xy - 5y = -1 \end{cases}.$$

А) (1,5; 0,5), $\left(1; \frac{1}{3}\right)$; Б) (–1,5; 0,5), $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$; В) (–1,5; –1), $\left(0,5; \frac{1}{3}\right)$.

№ 7

№ 7. Решите задачу:

Два сотрудника издательства должны были набрать текст рукописи за 6 часов. Однако один из них опоздал, и второму пришлось набрать 20% текста одному. Остальную часть работы доделывал опоздавший сотрудник, потратив на нее 12 ч. За какое время эту рукопись мог напечатать каждый из этих сотрудников, работая отдельно? Известно, что скорость набора текста у них разная.

А) 10 ч и 15 ч; Б) 12 ч и 12 ч; В) 15 ч и 12 ч; Г) 10 ч и 12ч.

Часть С

(ход решения и ответ записывается на отдельном листе)

№ 8. Решите симметрическую систему:

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 30 \\ x + y + xy = 11 \end{cases}.$$

Ответы и решения к тесту:

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7
А	*Б*	*В*	*Г*	*А*	*Б*	*А*

№ 8

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 30 \\ x + y + xy = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y) = 30 \\ x + y + xy = 11 \end{cases}$$

Пусть $u = x + y$, $v = xy$, тогда:

$$\begin{cases} vu = 30 \\ u + v = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} vu = 30 \\ u = 11 - v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v(11-v) = 30 \\ u = 11 - v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11v - v^2 - 30 = 0 \\ u = 11 - v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v^2 - 11v + 30 = 0 \\ u = 11 - v \end{cases}$$

По теореме, обратной теореме Виета, корнями первого уравнения системы будут $v_1 = 5$ и $v_2 = 6$, тогда из второго уравнения $u_1 = 6$ и $u_2 = 5$.

Возвращаясь к «старым» неизвестным получим две системы:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 5 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}.$$

Решим их.

1) $$\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - y \\ xy = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - y \\ xy = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - y \\ (6-y)y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - y \\ y^2 - 6y + 5 = 0 \end{cases}$$

По теореме, обратной теореме Виета, корнями второго уравнения системы будут $y_1 = 5$ и $y_2 = 1$, тогда из первого уравнения $x_1 = 1$ и $x_2 = 5$.

2) Вторую систему можно решить сразу, используя теорему, обратную теореме Виета. Если $x + y = 5$, $xy = 6$, то числа x, y являются корнями уравнения $t^2 - 5t + 6 = 0$, то есть $x = 3$, $y = 2$ или $x = 2$, $y = 3$. Аналогичными рассуждениями могли быть решены и первая система, и система с неизвестными u и v.

Ответ: (1; 5), (5; 1); (3; 2), (2; 3).

Шкала успешности:

9–10 баллов – *отлично*
6–8 баллов – *хорошо*
4–5 баллов – *удовлетворительно*

Задачи для самоконтроля к Главе 4

396 Укажите, между какими последовательными целыми числами заключено число:

а) $\sqrt[3]{10}$; б) $\sqrt[3]{50}$; в) $\sqrt[3]{100}$.

397 Решите графически уравнение $\sqrt[3]{x} = 10 - x$.

398 Вычислите:

а) $4^2 \cdot 4^{-3} - 1{,}5^0 - 2 : 2^{-2} + 16^{0{,}25}$;

б) $5^2 : 5^{-1} + \left(\sqrt{3}\right)^0 - 4^2 \cdot 4^{-3} - 27^{\frac{2}{3}}$.

Задачи для самоконтроля к Главе 4

399 Упростите выражения:

а) $\left(\dfrac{a-1}{a^{\frac{1}{3}}-1}+a^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-1}{a^{\frac{2}{3}}-1}$; б) $\left(\dfrac{1-x^{1,5}}{1+x^{0,5}+x}+x^{0,5}\right):\dfrac{x^{0,5}+1}{1-x}$.

400 Решите уравнения:

а) $x^4-5x^2+4=0$;

б) $x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1=0$;

в) $x^3-6x^2+9x-2=0$;

г) $x^4+2x^3-22x^2+2x+1=0$;

д) $2\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-2}-\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-1}-1=0$;

е) $3\left(x^2+x^{-2}\right)+2\left(x+x^{-1}\right)=2$.

ж) $(x-4)^{\frac{1}{3}}=2$;

з) $\sqrt{2x+4}=2$

и) $\sqrt{x^2-4x+1}=-1$;

к) $2x-\sqrt{x^3+2x^2-3x}=0$.

401 Решите неравенства:

а) $(x-3)(x-2)(x+8)>0$;

б) $\dfrac{x+4}{x-2}<0$;

в) $x^3+x^2-x-1>0$;

г) $2x^4-2x^3-2x^2+2x\leqslant 0$;

д) $(x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1)(x-2)\geqslant 0$;

е) $\dfrac{6x^2-5x+4}{6x^2-x-2}\geqslant 0$.

402 Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases}x-y=5\\ xy=6\end{cases}$;

б) $\begin{cases}x^2-6xy+9y^2=x-y\\ x-3y=1\end{cases}$;

в) $\begin{cases}x^2-xy+y^2=13\\ x-y=1\end{cases}$;

г) $\begin{cases}\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=1\\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}=-3\end{cases}$.

403 Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases}2x^2-3xy+y^2=0\\ 2x^2-5xy+y^2=-4\end{cases}$; б) $\begin{cases}xy+x+y=9\\ x^2y+xy^2=20\end{cases}$.

404 а) В кинотеатре два зала для просмотра кинофильмов в формате 3D. В первом зрительном зале 420 мест, а во втором 480. Во втором зале на 5 рядов меньше, чем в первом, но в каждом ряду на 10 мест больше, чем в каждом ряду первого зала. Сколько мест в ряду в каждом из этих залов?

б) На двух сторонах прямоугольника построены квадраты. Площадь одного из них на 24 см^2 больше площади другого. Найдите длину и ширину прямоугольника, если известно, что его площадь составляет 35 см^2.

в) Автомобилист проехал некоторую дистанцию с постоянной скоростью. Если бы автомобилист уменьшил скорость на 10 км/ч, то проехал бы дистанцию на 15 мин медленнее, а если бы увеличил скорость на 20 км/ч, то проехал бы эту же дистанцию на 21 мин быстрее. Найдите скорость автомобилиста.

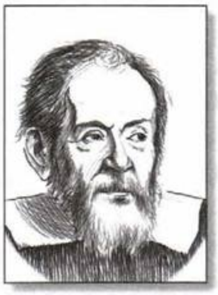
405 Вася считает, что его шаг равен полметра. Чтобы отсчитать 11 метров для штрафного удара, он сделал 22 шага от линии ворот; на самом деле расстояние до ворот было 1047 см. Определите абсолютную и относительную погрешности приближения.

Глава 5*

Тригонометрические функции числового аргумента

§ 1. Тригонометрические функции и их основные свойства

1. Измерения углов и дуг в радианах



Геометрия является самым могущественным средством изощрения наших умственных способностей и дает нам возможность правильно мыслить и рассуждать.

Галилео Галилей (1564–1642),
итальянский физик, механик, астроном,
философ, математик

Эта глава посвящена такому разделу математики, как тригонометрия (от греч. *«тригонон»* – треугольник, *«метрейн»* – измерять). Именно с измерения треугольников начиналось развитие этой области математики, когда в процессе решения практических задач из области астрономии, геодезии, архитектуры учеными древности были установлены первые тригонометрические закономерности. Некоторое представление о тригонометрии было получено нами на уроках геометрии, посвященных изучению соотношений между сторонами и углами треугольника. Теперь мы расширим свои знания в этой области.

Сначала расширим свои представления о понятии угла.

В элементарном курсе планиметрии мы рассматривали углы от $0°$ до $360°$. Если угол определять как часть плоскости, заключенную между двумя лучами, выходящими из одной точки, то отрицательные значения углов и значения, большие $360°$, не имеют смысла.

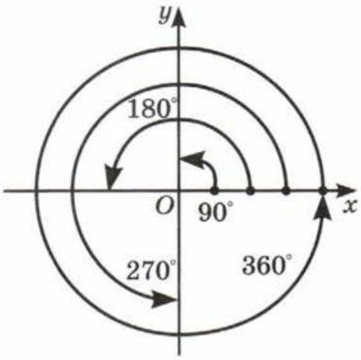


Рис. 1

Иначе обстоит дело, если рассматривать **угол как меру поворота луча**. Рассмотрим фиксированный луч с началом в точке O (для удобства будем считать, что на плоскости введена прямоугольная система координат и данный луч является положительным лучом оси Ox). Тогда положительный луч оси Oy получается из данного луча поворотом на $90°$ против часовой стрелки, отрицательный луч оси Ox – поворотом на $180°$ против часовой стрелки, отрицательный луч оси Oy – поворотом на $270°$ против часовой стрелки (рис. 1).

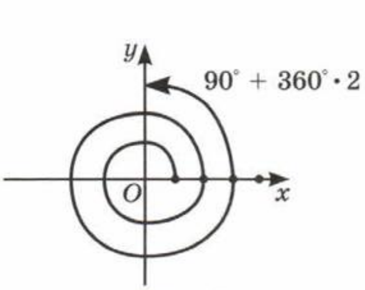


Рис. 2

Если продолжить процесс и совершить поворот на $360°$ против часовой стрелки, то мы вернемся к положительному лучу оси Ox. Ничто не мешает, завершив полный оборот, продолжать вращение. Совершив оборот еще на $90°$, то есть всего на $450°$, получим положительный луч оси Oy. Его же мы получим при повороте еще на $360°$, то есть всего на $810°$, и т.д. (рис. 2).

Ясно, что поворот на $90° + 360° \cdot n$, $n \in \mathbf{N}$, дает нам положительный луч оси Oy. Поворот на $45° + 360° \cdot n$, $n \in \mathbf{N}$, дает биссектрису первого координатного угла (рис. 3).

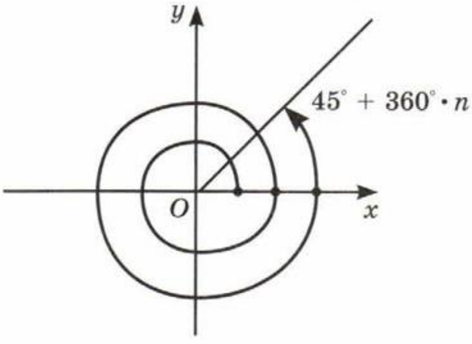


Рис.3

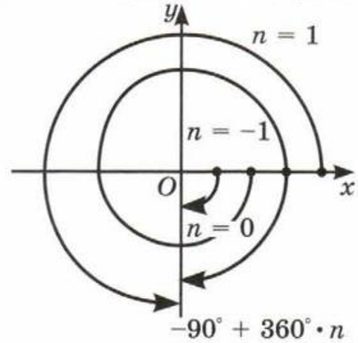


Рис.4

Можно рассматривать и **отрицательные значения углов**, полученные при вращении положительного луча оси Ox по часовой стрелке. Так, поворот на угол $-90°$ (то есть на $90°$ по часовой стрелке) дает отрицательный луч оси Oy, то есть результат тот же, что и при повороте на $+270°$ (рис. 4).

Углы (любого знака), величины которых отличаются на $360° \cdot n$, $n \in \mathbf{N}$, дают в результате поворота один и тот же луч. Так как $270° = -90° + 360°$, то поворот на угол $-90° + 360° \cdot n$, $n \in \mathbf{Z}$, дает отрицательный луч оси Oy.

Таким образом, исследование поворотов против часовой стрелки и по часовой стрелке позволяет определить любые действительные значения углов (выраженные в градусах).

До этого момента мы измеряли углы в градусной мере, приняв за единицу измерения **градус** – угол, равный $\frac{1}{90}$ прямого угла. Однако для углов поворота эта единица измерения не всегда удобна. Введем новую единицу измерения углов.

Из курса планиметрии известно, что длина окружности радиуса R равна $2\pi R$, тогда длина полуокружности равна πR, четверти окружности – $\frac{\pi R}{2}$ и т.д. Ясно, что если дуга окружности соответствует центральному углу $K°$, то длина этой дуги пропорциональна числу соответствующих ей градусов[6]. Поэтому длина полуокружности равна πR, длина дуги в $1°$ равна $\frac{\pi R}{180}$. И значит, длина дуги в $K°$ окружности радиуса R равна $\frac{\pi R}{180} \cdot K$.

Рассмотрим окружность радиуса R. Повернем ее радиус на такой угол поворота, чтобы ему соответствовала дуга, равная радиусу R (рис. 5). Такой угол имеет специальное название – его называют радианом (от лат. *radius* – радиус).

Определение 1**.** Угол, такой, что длина соответствующей ему дуги окружности равна длине радиуса этой окружности, называется **радианом** (1 рад).

Рис. 5

Выясним, во сколько раз развернутый угол больше угла в один радиан. Углу в $180°$ соответствует дуга, равная πR (полуокружность). Чтобы узнать сколько радианов умещается в развернутый угол нужно πR разделить на R, получим:

$180° = \pi$ рад $\approx 3{,}14$ рад.

[6] Аккуратно этот факт мы доказать не сможем, так как мы не имеем строгого определения длины кривой линии, но он достаточно нагляден, и мы примем его без доказательства.

Отсюда можно выразить 1° в радианах. $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ рад.

Пользуясь этим равенством, можно выразить произвольный угол K° через радианы:

$K^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot K$рад.

Значит, любой угол поворота можно выразить в радианах. Во многих случаях работать с углами, выраженными в радианах, гораздо удобнее, чем в градусах. Поэтому наряду с градусной мерой углов мы будем использовать и радианную меру (единицей измерения в ней служит не градус, а радиан). Поэтому нам важно научиться работать с этой новой для нас единицей измерения углов.

Итак, развернутый угол 180° равен π радиан, полный угол 360° равен 2π радиан, прямой угол 90° равен $\frac{\pi}{2}$ радиан и т.д.

Выразим несколько углов для I и II четвертей в радианах и заполним таблицу:

В градусах	0	15	18	30	45	60	72	90	120	135	150	180
В радианах	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Выразим несколько углов для III и IV четвертей в радианах и продолжим заполнять таблицу:

В градусах	210	225	240	270	300	315	330	360
В радианах	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

Уточним, что углами I четверти мы считаем те углы, для которых луч, являющийся результатом поворота положительного луча оси Ox, лежит в I координатной четверти и т.д. (рис. 6).

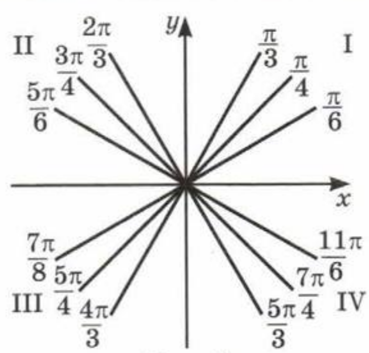


Рис. 6

Полезным бывает знать, сколько градусов в одном радиане. Выразим радиан в градусах. Так как $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ рад, то $1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57{,}3^\circ$.

Рассмотрим пример перевода величин углов из градусной в радианную меру.

Пример. Выразить в радианах угол:

а) 12°; б) -36°; в) 450°; г) 1065°; д) -720°.

Решение.

Используя формулу перевода: $K^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot K$ рад, будем делить данную величину угла на 180 и умножать на π, тогда:

а) $12^\circ = \frac{12\pi}{180}$ рад $= \frac{\pi}{15}$ рад; б) $-36^\circ = -\frac{36\pi}{180}$ рад $= -\frac{\pi}{5}$ рад; в) $450^\circ = \frac{450\pi}{180}$ рад $= \frac{5\pi}{2}$ рад;

г) $1065^\circ = \frac{1065\pi}{180}$ рад $= \frac{71\pi}{12}$ рад; д) $720^\circ = -4\pi$ рад .

Ответ: а) $\frac{\pi}{15}$; б) $-\frac{\pi}{5}$; в) $\frac{5\pi}{2}$; г) $\frac{71\pi}{12}$; д) -4π.

В заключение отметим, что угловая мера дуги окружности всегда считается равной угловой мере соответствующего ей центрального угла. Поэтому дуга четверти окружности равна $\frac{\pi}{2}$ радиан, дуга полуокружности равна π радиан и т.д.

К **406** Вася и Петя должны пробежать три километра по четырехсотметровому стадиону, начиная бежать с линии старта.

а) В некоторый момент они поравнялись. Означает ли это, они пробежали равные дистанции?

б) На сколько метров Вася может опережать Петю, если Петя бежит в пятидесяти метрах перед ним?

в) Сколько метров пробежал Вася, если он находится в точке, диаметрально противоположной стартовой линии?

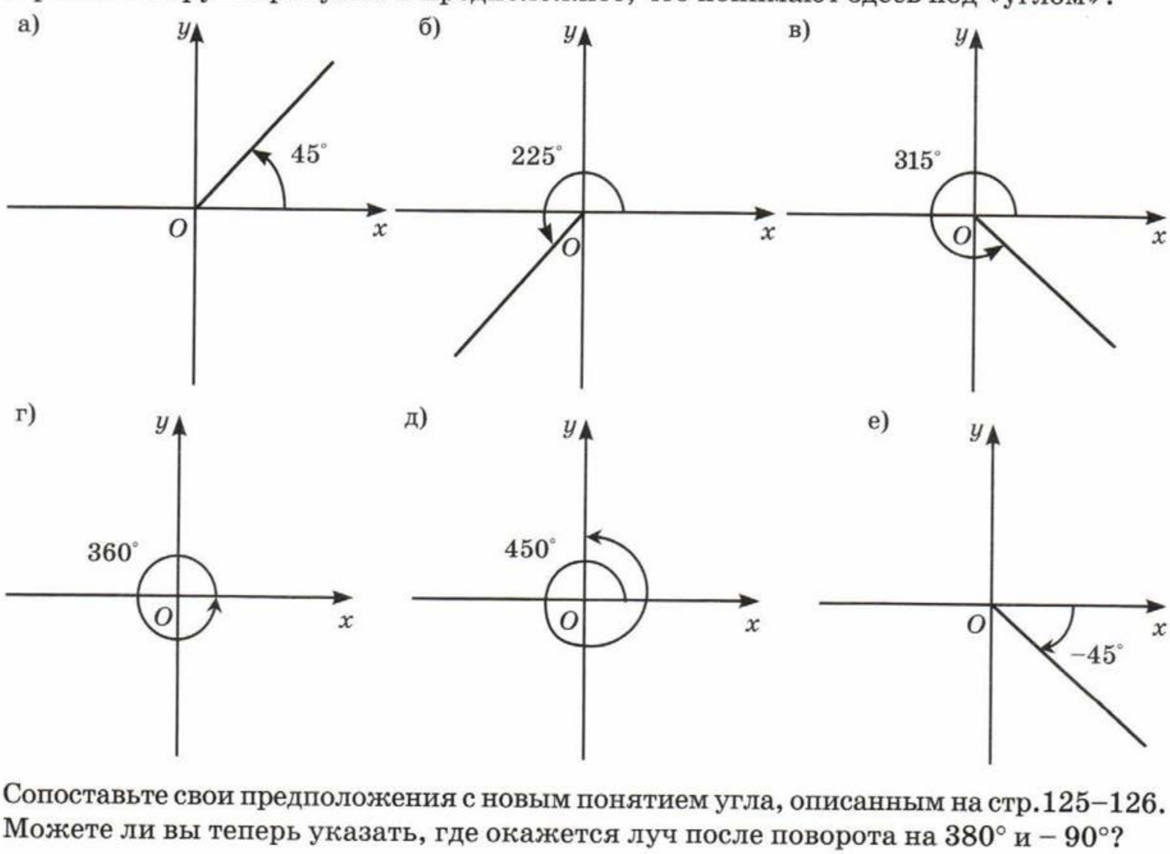
407 Укажите, какие из следующих углов пока не имеют для вас смысла:

а) $90°$; в) $120°$; д) $380°$;

б) $45°$; г) $300°$; е) $-90°$.

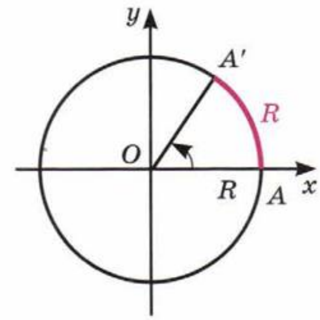
Можно ли, понимая под углом часть плоскости, заключенную между двумя лучами, выходящими из одной точки, составить представление о последних двух углах? Воспользуйтесь следующим заданием, чтобы расширить свои представления о понятии угла.

408 Проанализируйте рисунки и предположите, что понимают здесь под «углом»?



Сопоставьте свои предположения с новым понятием угла, описанным на стр.125–126. Можете ли вы теперь указать, где окажется луч после поворота на $380°$ и $-90°$?

409 Постройте окружность на координатной плоскости с центром в точке (0; 0) и радиусом, равным 1. Найдите: а) длину этой окружности; б) длину полуокружности; в) длину дуги, соответствующей центральному углу 90°; г) длину дуги, соответствующей центральному углу 45°.
Запишите эти длины для окружности с радиусом R.



410 На рисунке построена окружность с центром в точке (0; 0) и радиусом, равным R. Объясните с помощью какого преобразования плоскости ее радиус OA перешел в радиус OA'. Какова длина дуги, соответствующей углу поворота AOA'? С помощью учебника выясните, как называют угол AOA' и для чего он используется.

411 Выразите в радианах угол:
а) 15°; б) −72°; в) 150°; г) 3600°; д) −123°.

412 Выразите в градусах угол:
а) $\frac{5\pi}{12}$; б) $-\frac{4\pi}{9}$; в) $\frac{7\pi}{15}$; г) $1{,}3\pi$; д) $-\frac{17\pi}{45}$ радиан.

413 Углом какой четверти является угол:
а) 80°; б) 170°; в) 260°; г) 290°; д) 350°?

414 Углом какой четверти является угол:
а) − 80°; б) −200°; в) −260°; г) −290°; д) −350°?

415 Углом какой четверти является угол:
а) 440°; б) 560°; в) 980°; г) 1010°; д) 1430°?

416 Углом какой четверти является угол:
а) $\frac{\pi}{9}$; б) $\frac{17\pi}{10}$; в) $\frac{7\pi}{6}$; г) $\frac{13\pi}{7}$; д) $\frac{19\pi}{4}$?

417 Даны углы:
−800°; −710°; −170°; −80°; 10°; 100°; 1000°; 1810°; $-\frac{89\pi}{18}$ рад; $-\frac{40\pi}{9}$ рад;
$-\frac{17\pi}{18}$ рад; $-\frac{4\pi}{9}$ рад; $\frac{\pi}{18}$ рад; $\frac{5\pi}{9}$ рад; $\frac{37\pi}{18}$ рад; $\frac{140\pi}{9}$ рад.
Разбейте их на группы так, чтобы все углы из одной группы задавали одну и ту же точку на тригонометрической окружности, а из разных – разные.

418 Оцените абсолютную и относительную погрешности приближений:
а) один радиан считаем приближенно равным 60°;
б) один градус считаем приближенно равным 0,017 радиан.

П **419** Вычислите значения:
а) $\sqrt[4]{0{,}0081}$; в) $\sqrt[6]{\left(\frac{3}{4}\right)^6}\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{2}{3}\right)^{12}}$; д) $\sqrt[3]{5\cdot 12^4}\cdot\sqrt[3]{5^8\cdot 12^5}$;
б) $\sqrt[5]{(-5)^5}$; г) $\frac{\sqrt[5]{1024}\cdot\sqrt[6]{729}}{3\cdot\sqrt[6]{(-9)^6}}$; е) $\frac{\sqrt[3]{9^{11}\cdot 4^8\cdot 5^{10}}}{\sqrt[3]{3^{13}\cdot 8^4\cdot 25^8}}$.

420 Сравните числа:

а) $\sqrt[6]{9}$ и $\sqrt{2}$; в) $\sqrt[6]{24}$ и $\sqrt[3]{5}$;

б) $\sqrt{2}$ и $\sqrt[5]{10}$; г) $\sqrt[5]{\sqrt{100}}$ и $\sqrt{\sqrt[5]{90}}$.

421 Найдите наибольшее целое число, не превосходящее:

а) $\sqrt[3]{45}$; б) $\sqrt[10]{1025}$; в) $\sqrt[4]{1300}$.

422 При каких x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt[5]{15-5x}$; г) $\sqrt[12]{5x^2-6x+1}$;

б) $\sqrt[4]{18+7x-x^2}$; д) $\sqrt[10]{\dfrac{(x-7)^2}{x^2-10x+16}}$?

в) $\sqrt[3]{6-x}$;

D **423** Выразите в радианах угол:

а) $25°$; б) $-126°$; в) $135°$; г) $810°$; д) $-468°$.

424 Выразите в градусах угол:

а) $-\dfrac{3\pi}{20}$; б) $\dfrac{7\pi}{5}$; в) $-\dfrac{11\pi}{12}$; г) $2{,}7\pi$; д) $-\dfrac{7\pi}{360}$ радиан.

425 Углом какой четверти является угол:

а) $10°$; б) $-210°$; в) $210°$; г) $-370°$?

426 Углом какой четверти является угол:

а) $\dfrac{\pi}{11}$; б) $\dfrac{18\pi}{11}$; в) $\dfrac{8\pi}{9}$; г) $\dfrac{15\pi}{8}$; д) $\dfrac{21\pi}{5}$?

427 Оцените абсолютную и относительную погрешности приближений:

а) длину окружности радиуса 1 считаем приближенно равной 6;

б) длину радиуса круга площадью 1 считаем приближенно равной 1,8.

428 Вычислите значения:

а) $\sqrt[6]{0{,}000064}$; в) $\sqrt[5]{\left(\dfrac{2}{7}\right)^{10}}\cdot\sqrt[6]{\left(\dfrac{7}{8}\right)^{6}}$; д) $\sqrt[6]{4^5\cdot 11^8}\cdot\sqrt[6]{4^7\cdot 11^{10}}$;

б) $\sqrt[8]{(-8)^8}$; г) $\dfrac{\sqrt[3]{729}\cdot\sqrt[8]{256}}{0{,}2\cdot\sqrt[7]{(-3)^7}}$; е) $\dfrac{\sqrt[4]{16^6\cdot 6^{12}\cdot 49^2}}{\sqrt[4]{7^{12}\cdot 36^4\cdot 2^8}}$.

429 При каких x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt[5]{5x+1}$; г) $\sqrt[8]{x^2-3x+4}$;

б) $\sqrt[14]{10x-x^2-21}$; д) $\sqrt[6]{4x^2-12x+9}$;

в) $\sqrt[4]{5-x^2}$; е) $\sqrt[10]{-x^2-8x-16}$?

C **430*** В 12 часов дня часовая и минутная стрелки часов совпали. Сколько градусов пройдет минутная стрелка до следующего совпадения с часовой?

2. Тригонометрические функции числового аргумента

Облагораживают не знания, а любовь и стремление к истине, пробуждающиеся в человеке, когда он начинает приобретать знания. В ком не пробудились эти чувства, того не облагородят ни университет, ни обширные сведения, ни дипломы.

Дмитрий Иванович Писарев (1840–1868),
русский публицист и литературный критик

В курсе планиметрии 8 класса определяются такие понятия, как синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла. Напомним, что отношения сторон прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) называют следующим образом:

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}, \cos\alpha = \frac{AC}{AB}, \operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}, \operatorname{ctg}\alpha = \frac{AC}{BC},$$

где $\alpha = \angle A$ (см. рис. 1).

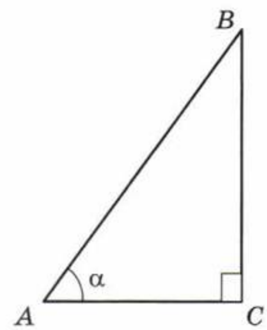


Рис. 1

Так как острый угол всегда можно считать углом некоторого прямоугольного треугольника, то мы фактически определили эти понятия для любых острых углов (то есть углов, лежащих в I координатной четверти).

Далее требовалось расширить понятие косинуса и синуса для произвольного угла от 0° до 180°, то есть нужно было знать, что такое косинус и синус не только острого, но и прямого, а также тупого угла. Эти величины определялись нами соотношениями:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha;\ \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha,\ 0° < \alpha < 90°;\ \sin 90° = 1;\ \cos 90° = 0.$$

Значит, мы фактически расширили эти понятия для углов, лежащих во II координатной четверти.

Возникает вопрос, можно ли рассматривать синус, косинус, тангенс и котангенс развернутого угла, а также углов, превышающих по величине развернутый угол (включая и новые для нас углы, большие 360°). Возможно ли расширить эти понятия для отрицательного угла?

В этом пункте мы узнаем ответы на эти вопросы, но сначала уточним некоторые известные нам свойства.

Во-первых, отметим, что значение синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла α не зависит от размеров прямоугольного треугольника. Это следует из признака подобия прямоугольных треугольников.

Во-вторых, из определений $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ следует, что

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

В-третьих, мы знаем, что

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha,\ \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha;\ \operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Теперь вспомним значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ (соответственно, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$) для некоторых углов от 0° до 180°, указывая эти углы не только в градусах, но и в радианах.

Заполним таблицу.

$\alpha,\ ^\circ$	0	30	45	60	90	120	135	150	180
α, рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$\sqrt{3}$	–

Естественно считать, что $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$ (для сохранения равенств $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$; $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$).

Отметим, что $\operatorname{tg} 90^\circ$, $\operatorname{ctg} 0^\circ$, $\operatorname{ctg} 180^\circ$ не определены, так как $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, и для сохранения этих равенств при $\alpha = 0^\circ$ и 180° пришлось бы делить на 0.

Определим теперь синус, косинус, тангенс и котангенс для произвольного угла. При этом $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ вычисляются от угла α, выраженного в радианах (например, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = -1$ и т.д.). В дальнейшем значение угла мы будем считать числовым (безразмерным), то есть выраженным в радианах; при необходимости можно будет перевести его значение в градусы.

Определение 1. Пусть $\alpha \in \boldsymbol{R}$; P_0 – точка с координатами (1; 0) в прямоугольной системе координат на плоскости; P_α – точка, в которую переходит P_0 при повороте плоскости вокруг точки O (начало координат) на угол α радиан против часовой стрелки, если $\alpha \geqslant 0$, и на угол $|\alpha|$ по часовой стрелке, если $\alpha < 0$ (рис. 2).

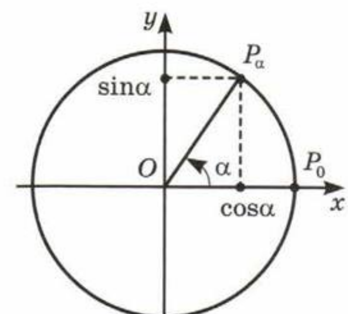


Рис. 2

Тогда

косинусом числа α называется абсцисса точки P_α (обозначаем $\cos\alpha$);

синусом числа α называется ордината точки P_α (обозначаем $\sin\alpha$);

тангенсом числа α называется отношение $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, если $\cos\alpha \neq 0$ (обозначаем $\operatorname{tg}\alpha$);

котангенсом числа α называется отношение $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, если $\sin\alpha \neq 0$ (обозначаем $\operatorname{ctg}\alpha$).

Отметим, что расстояние между исходными точками равно расстоянию между точками, в которые они перешли при повороте, поэтому:

$OP_\alpha = OP_0 = 1$ ($O \to O$, $P_0 \to P_\alpha$).

Значит, точка P_α лежит на единичной окружности с центром в начале координат: $OP_\alpha = 1$. Такую окружность принято называть *тригонометрической окружностью*.

Ясно, что для острого угла введенные нами определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса совпадают с ранее введенными их определениями.

В самом деле, из прямоугольного треугольника $OP_\alpha A$ по ранее введенному определению синуса и косинуса острого угла: $\sin\alpha = \dfrac{AP_\alpha}{OP_\alpha} = \dfrac{OB}{1} = OB$, $\cos\alpha = \dfrac{OA}{OP_\alpha} = \dfrac{OA}{1} = OA$ – совпадает с определением $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ как координат точки P_α (рис. 3).

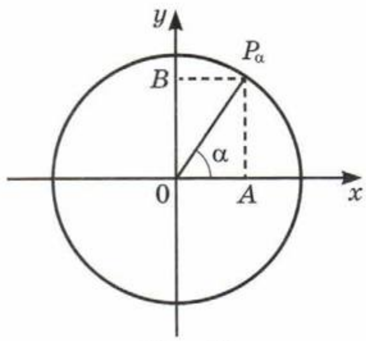


Рис. 3

Для тупого угла определения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ также совпадают с введенными ранее, вследствие равенств $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ и $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$, которые мы докажем ниже. Наконец, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, что также соответствует введенным ранее определениям.

Введенное нами определение косинуса числа α любому действительному числу α ставит в соответствие единственное значение $\cos\alpha$, поэтому косинус является функцией. Аналогично $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ также можно рассматривать как функции от действительного аргумента α. Эти функции называют *тригонометрическими функциями*.

Исследуем знаки этих функций в зависимости от того, в какой четверти лежит угол. Из определения тригонометрических функций следует, что $\sin\alpha > 0$, когда точка P_α имеет положительную ординату, то есть лежит на полуокружности, выделенной на тригонометрической окружности цветом, и $\sin\alpha < 0$, когда точка P_α лежит на полуокружности черного цвета. Соответственно для углов первой и второй четвертей синус положителен, а для углов третьей и четвертой четвертей отрицателен (рис. 4а).

Знаки синуса

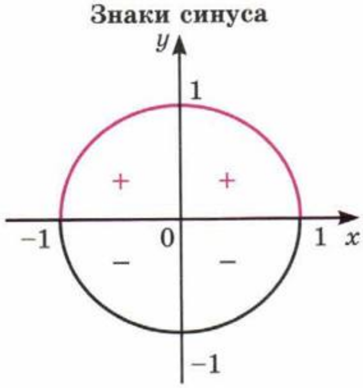


Рис. 4а

Знаки косинуса

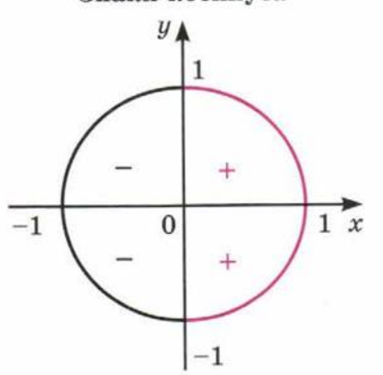


Рис.4б

Знаки тангенса и котангенса

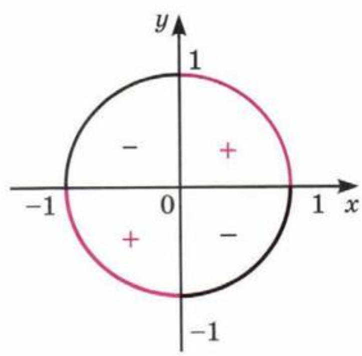


Рис. 5

Аналогично $\cos\alpha > 0$, когда точка P_α лежит на полуокружности, выделенной на тригонометрической окружности цветом, и $\cos\alpha < 0$, когда точка P_α лежит на полуокружности черного цвета. Соответственно для углов первой и четвертой четвертей косинус положителен, а для углов второй и третьей четвертей отрицателен (рис. 4б).

Знаки $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ можно найти по определению. Например, пусть угол α лежит в III четверти. Абсцисса и ордината соответствующей точки P_α отрицательны, значит, $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} > 0$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} > 0$. Рассмотрев другие варианты, получаем, что для углов первой и третьей четверти тангенс и котангенс принимает положительные значения, а для углов второй и четвертой четвертей отрицательные (рис. 5).

Теперь мы можем привести общую таблицу знаков тригонометрических функций в различных координатных четвертях:

α	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\operatorname{tg}\alpha$	+	−	+	−
$\operatorname{ctg}\alpha$	+	−	+	−

Пример 1. Определить знаки синусов углов $\frac{22}{7}\pi$, $\frac{44}{7}\pi$, $\frac{88}{7}\pi$, $-\frac{72}{7}\pi$.

Решение.

Чтобы понять, какой координатной четверти принадлежит угол, представим его в виде суммы, выделив в этой сумме угол, кратный углу полного поворота ($2\pi n$). В зависимости от того, каким будет второе слагаемое, определимся с его координатной четвертью.

Так как $\frac{22}{7}\pi = 2\pi + \pi + \frac{\pi}{7}$, а $\frac{1}{7}\pi$ меньше $\frac{1}{2}\pi$, то этот угол принадлежит третьей координатной четверти, значит, $\sin\frac{22}{7}\pi < 0$.

Так как $\frac{44}{7}\pi = 6\pi + \frac{2\pi}{7}$, а $\frac{2}{7}\pi$ меньше $\frac{1}{2}\pi$, то этот угол принадлежит первой координатной четверти, значит, $\sin\frac{44}{7}\pi > 0$.

Так как $\frac{88}{7}\pi = 12\pi + \frac{4}{7}\pi$, а $\frac{4}{7}\pi$ больше $\frac{1}{2}\pi$, то этот угол принадлежит второй координатной четверти, значит, $\sin\frac{88}{7}\pi > 0$.

Так как $-\frac{72}{7}\pi = -12\pi + \pi + \frac{5}{7}\pi$, а $\frac{5}{7}\pi$ больше $\frac{1}{2}\pi$, то этот угол принадлежит четвертой координатной четверти, значит, $\sin\left(-\frac{22}{7}\pi\right) < 0$.

Ответ: $\sin\frac{22}{7}\pi < 0$; $\sin\frac{44}{7}\pi > 0$; $\sin\frac{88}{7}\pi > 0$; $\sin\left(-\frac{22}{7}\pi\right) < 0$.

Пример 2. Найти знаки тригонометрических функций числа 4.

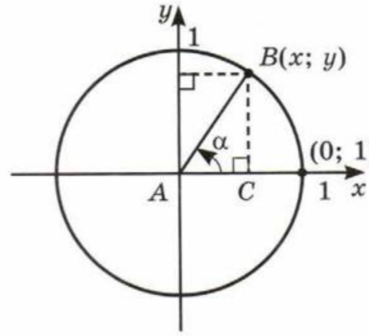
Решение.

Так как $\pi \approx 3{,}14$, то $\pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$. Угол в 4 радиана лежит в III четверти, поэтому $\sin 4 < 0$, $\cos 4 < 0$, $\operatorname{tg} 4 > 0$, $\operatorname{ctg} 4 > 0$. ■

431 1) Для прямоугольного треугольника с прямым углом C и со сторонами $AC = 3$ см, $BC = 4$ см, найдите $\sin\angle A$, $\cos\angle A$, $\operatorname{tg}\angle A$, $\operatorname{ctg}\angle A$.

2) Изменятся ли значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса $\angle A$, если все стороны треугольника увеличить (уменьшить) в 2 раза? в n раз?

432 1) Рассмотрите рисунок, изображающий острый угол поворота α, который переводит точку с координатами (0; 1) в точку с координатами (x; y), обозначенную на рисунке B. Выразите $\cos\alpha$ из прямоугольного треугольника ABC. Сопоставьте полученное значение с абсциссой точки B. Выразите $\sin\alpha$ из прямоугольного треугольника ABC. Сопоставьте полученное значение с ординатой точки B. Что вы замечаете?



2) Пользуясь сделанными выводами, попытайтесь расширить понятия синуса и косинуса для произвольного угла α (включая и углы, большие $360°$). Что тогда будет называться тангенсом и котангенсом такого угла? Возможно ли распространить эти понятия на отрицательные углы? Сопоставьте свои предположения с определением на стр. 132.

433 Найдите значение выражений:

а) $2\sin 30° \cos 30° - \sin 120°$; б) $\cos\frac{5\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} - \cos\frac{2\pi}{3}$.

434 На тригонометрической окружности отмечены точки A, B, C и D. Точка A лежит в I координатной четверти, B – во II, C – в III и D – в IV. Выпишите точки:

а) с положительной абсциссой; в) с положительной ординатой;

б) с отрицательной абсциссой; г) с отрицательной ординатой.

435 1) Пользуясь определением, покажите, для каких точек тригонометрической окружности синус будет положительным, а для каких отрицательным. Объясните, какой знак имеет синус угла I координатной четверти, II координатной четверти, III координатной четверти, IV координатной четверти.

2) Пользуясь определением, объясните, какие знаки имеет косинус углов первой и четвертой четвертей, углов второй и третьей четвертей.

3) Пользуясь этими выводами, объясните, какие знаки имеет тангенс и котангенс углов различных координатных четвертей.

4) Изобразите эти правила схематично на тригонометрических окружностях. Сопоставьте свои схемы со схемами из учебника.

436 Определите знаки выражений:

а) $\sin 95°$; в) $\operatorname{tg} 511°$; д) $\cos(-430°)$;

б) $\cos 17°$; г) $\sin(-165°)$; е) $\operatorname{ctg}(-1000°)$.

437 Определите знаки выражений:

а) $\sin\frac{17}{3}\pi$; б) $\cos 2{,}7\pi$; в) $\operatorname{tg}\frac{100}{11}\pi$; г) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{73}{6}\pi\right)$.

438 Найдите знаки тригонометрических функций числа 21.

П **439** Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[4]{2500}$; б) $\sqrt[6]{\frac{a^7b^{19}}{4^3}}$; в) $\sqrt[5]{7^6m^{12}n^{13}}$; г) $\sqrt[8]{-p^{10}q^9}$.

440 Внесите множитель под знак корня:

а) $4\sqrt[3]{2a}$; б) $-m^3k^2\cdot\sqrt[5]{2mk}$; в) $b\sqrt[5]{bn}$; г) $q\sqrt[4]{q}$; д) $t\sqrt[8]{-t}$; е) $-d^3s\sqrt[6]{\frac{s^3}{d^5}}$.

441 Представьте выражение в виде корня некоторой степени из числа:

а) $\sqrt[3]{0,2} \cdot \sqrt{5}$; б) $\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt[6]{3}}{\sqrt[4]{3}}$; в) $\sqrt[6]{ab} \cdot \sqrt[6]{\dfrac{ac}{b^5}} \cdot \sqrt[6]{\dfrac{b^5}{a^3c^3}}$, где a, b, c положительные числа.

Д **442** Найдите значение выражений:

а) $\sin 120° \sin 60° + \sin 150° \sin 30°$; б) $2\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{3\pi}{4} - \operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{3}\operatorname{ctg}\dfrac{5\pi}{6}$.

443 Определите знаки выражений:

а) $\sin 215°$; в) $\operatorname{tg} 1150°$; д) $\cos(-955°)$;

б) $\cos 822°$; г) $\sin(-395°)$; е) $\operatorname{ctg}(-3300°)$.

444 Определите знаки выражений:

а) $\sin\dfrac{25}{3}\pi$; б) $\cos\dfrac{205}{11}\pi$; в) $\operatorname{tg} 9{,}8\pi$; г) $\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{111}{8}\pi\right)$.

445 Найдите знаки тригонометрических функций числа 30.

446 Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{-a^3}$; б) $\sqrt[4]{x^6y^8}$; в) $\sqrt[3]{m^{10}}$; г) $\dfrac{1}{q}\sqrt{-q^9}$.

447 Внесите множитель под знак корня:

а) $(a-2)\sqrt{\dfrac{1}{2-a}}$; б) $-bc \cdot \sqrt[4]{c}$; в) $x \cdot \sqrt[7]{xz}$; г) $2d\sqrt{-\dfrac{1}{16d^5}}$.

С **448*** Определите величину угла между часовой и минутной стрелками часов в 13 ч 20 мин.

3. Свойства тригонометрических функций

Кто не стремится, тот не достигнет,
кто не дерзает, тот и не получает.

Виссарион Григорьевич Белинский (1811–1848),
русский писатель, литературный критик

Для тригонометрических функций острых углов в курсе планиметрии нами были выявлены основные тождества. Например, основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (которое следовало из теоремы Пифагора); тождество, связывающее тангенс и котангенс: $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$ и пр.

В этом пункте мы выясним, выполняются ли эти тождества для тригонометрических функций произвольного **числового аргумента.** Для этого воспользуемся определением, введенным нами в предыдущем пункте. Сначала докажем основное тригонометрическое тождество.

I. Основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Доказательство.

Точка $P_\alpha(\cos\alpha; \sin\alpha)$ лежит на единичной окружности, следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнению окружности $x^2 + y^2 = 1$, поэтому сумма квадратов ее координат равна 1, то есть $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. ■

Получим другие свойства функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

II. Для всех α выполняются равенства

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$; $\quad$ $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$;

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$; $\quad$ $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$;

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; $\quad$ $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

* * *

Доказательство.

Изобразим на тригонометрической окружности точки P_α, $P_{\pi-\alpha}$, $P_{\pi+\alpha}$, $P_{-\alpha}$ (на рис. 1 изображен случай, когда $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, то есть α из I четверти).

Эти четыре точки лежат в вершинах прямоугольника с центром в начале координат, стороны которого параллельны осям координат.

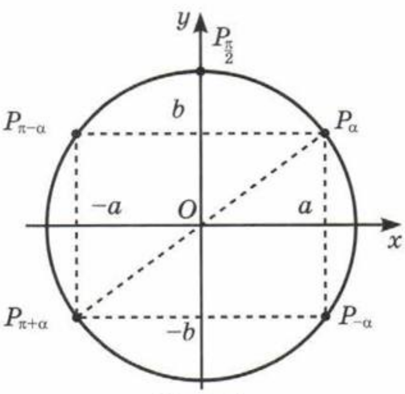


Рис. 1

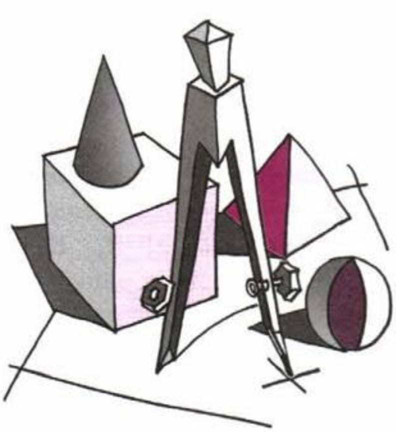
Действительно, точка $P_{-\alpha}$ симметрична точке P_α относительно оси Ox (эти точки получаются поворотом точки P_0 на углы α и $-\alpha$, то есть поворотом в противоположных направлениях на одинаковый угол от оси Ox).

Точка $P_{\pi-\alpha}$ симметрична точке P_α относительно оси Oy, так как $\pi - \alpha = \dfrac{\pi}{2} + \left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$, $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$ (точки $P_{\pi-\alpha}$ и P_α получаются поворотом точки $P_{\frac{\pi}{2}}(0; 1)$, лежащей на оси Oy, на углы $\dfrac{\pi}{2} - \alpha$ и $-\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$, то есть поворотом в противоположных направлениях на одинаковый угол от оси Oy).

Наконец, точка $P_{\pi+\alpha}$ симметрична точке P_α относительно начала координат, так как получается из нее поворотом на угол π, то есть на $180°$ (все повороты вокруг начала координат).

Тогда если одна вершина прямоугольника имеет координаты $P_\alpha(a; b)$, то другие – $P_{\pi-\alpha}(-a; b)$, $P_{\pi+\alpha}(-a; -b)$, $P_{-\alpha}(a; -b)$, откуда и следует нужное утверждение. Например, $\cos(\pi - \alpha)$ – это абсцисса точки $P_{\pi-\alpha}(-a; b)$, то есть $\cos(\pi - \alpha) = -a = -\cos\alpha$ и т.д. ■

В частности, отсюда следует, что функция $\sin\alpha$ нечетна, а функция $\cos\alpha$ – четна.



III. Функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ имеют период 2π, то есть для всех α выполняются равенства $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$, $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$.

Доказательство.

Это следует из того, что P_α и $P_{\alpha+2\pi}$ – одна и та же точка на тригонометрической окружности. ■

IV. Для всех α выполняются равенства $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$; $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$.

* * *

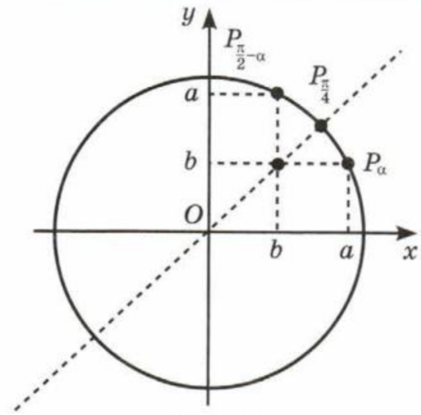


Рис. 2

Доказательство.

Достаточно доказать первое из этих равенств; второе следует из него при замене α на $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

Изобразим на тригонометрической окружности точки P_α, $P_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$ (рис. 2). Точки P_α и $P_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$ симметричны относительно прямой $y = x$ – биссектрисы I и III координатных углов (на рисунке $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$), так как $\alpha = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ и $\frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, то есть они получаются поворотом точки $P_{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, лежащей на этой биссектрисе, на углы $\frac{\pi}{4} - \alpha$ и $-\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

Тогда если $P_\alpha = (a; b)$, то $P_{\frac{\pi}{2}-\alpha} = (b; a)$, откуда и следует нужное утверждение.

V. Функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ ограничены на всей числовой прямой; для всех $\alpha \in \boldsymbol{R}$ выполняются неравенства $|\sin\alpha| \leqslant 1$, $|\cos\alpha| \leqslant 1$.

Доказательство.

Из основного тригонометрического тождества $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ следует, что $\sin^2\alpha \leqslant 1$, $\cos^2\alpha \leqslant 1$, поэтому $|\sin\alpha| = \sqrt{\sin^2\alpha} \leqslant 1$, $|\cos\alpha| \leqslant 1$. ■

VI. При всех $\alpha \in \boldsymbol{R}$ выполняется неравенство $|\sin\alpha| \leqslant |\alpha|$; при этом $|\sin\alpha| = |\alpha| \Leftrightarrow \alpha = 0$.

* * *

Доказательство.

Так как $\sin\alpha$ и α – нечетные функции, то достаточно доказать, что при $\alpha \geqslant 0$ выполняется неравенство $|\sin\alpha| \leqslant \alpha$. Тогда при $\alpha < 0$, рассмотрев $\beta = -\alpha > 0$, получим: $|\sin\alpha| = |\sin(-\beta)| = |-\sin\beta| = |\sin\beta| \leqslant \beta = -\alpha = |\alpha|$.

При $\alpha = 0$ оба выражения равны 0. Остается доказать, что при $\alpha > 0$ выполняется неравенство $|\sin\alpha| < \alpha$. Но если $\alpha > \frac{\pi}{2}$, то $|\sin\alpha| \leqslant 1 < \frac{\pi}{2} \leqslant \alpha$, и поэтому $|\sin\alpha| < \alpha$.

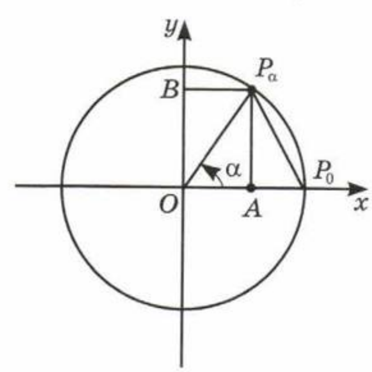


Рис. 3

Остается доказать, что при $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, то есть для углов из I четверти, выполняется неравенство $\sin\alpha < \alpha$ (учтено, что $\sin\alpha > 0$).

Изобразим на тригонометрической окружности точку P_α (рис. 3). Опустим из точки P_α перпендикуляры $P_\alpha A$ и $P_\alpha B$ соответственно на оси Ox и Oy. Тогда $\sin\alpha = OB = AP_\alpha < P_\alpha P_0$. Но длина хорды окружности $P_\alpha P_0$ меньше длины дуги $P_\alpha P_0$. Если угол α измеряется в радианах, то длина дуги равна αR, где $R = 1$ – радиус окружности. Поэтому дуга $P_\alpha P_0 = \alpha$, и $\sin\alpha < \alpha$. ■

Из курса планиметрии нам известно еще одно тождество, связывающее тангенс и котангенс. Докажем его для тригонометрических функций числового аргумента.

VII. При всех допустимых значениях α выполняется равенство: $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$.

Доказательство.

Так как по определению $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $(\cos\alpha \neq 0)$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $(\sin\alpha \neq 0)$, то равенство $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ выполняется для всех α, при которых определены $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$. ■

Как мы видим, это тождество выполняется не при всех α, а только при тех, где определены $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$. Найдем область определения этих функций.

VIII. Функция $\operatorname{tg}\alpha$ определена при всех значениях $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (то есть $\alpha \neq \pm\dfrac{\pi}{2}$, $\pm\dfrac{3\pi}{2}$, $\pm\dfrac{5\pi}{2}$, ...), а функция $\operatorname{ctg}\alpha$ определена при всех $\alpha \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (то есть $\alpha \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$).

Доказательство.

Функция $\operatorname{tg}\alpha$ определена при тех α, для которых $\cos\alpha \neq 0$, то есть когда точка P_α не лежит на оси ординат. А это значения $\alpha \neq \pm\dfrac{\pi}{2}, \pm\dfrac{3\pi}{2}, \pm\dfrac{5\pi}{2}, \ldots$. Функция $\operatorname{ctg}\alpha$ определена при всех α, для которых $\sin\alpha \neq 0$, то есть когда точка P_α не лежит на оси абсцисс. А это значения $\alpha \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$. ■

Заметим, что в отличие от этих функций областью определения как синуса, так и косинуса является вся числовая ось $(-\infty; +\infty)$.

IX. Функции $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ нечетны и имеют период π.

Доказательство.

Области определения как функции $\operatorname{tg}\alpha$, так и функции $\operatorname{ctg}\alpha$ симметричны относительно точки 0 на числовой прямой, поэтому имеет смысл говорить об их четности или нечетности. При всех α из области определения функции $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha,$$

значит, функция $\operatorname{tg}\alpha$ нечетна. Аналогично нечетной является функция $\operatorname{ctg}\alpha$.

Далее, для всех α из области определения функции $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \frac{\sin(\pi + \alpha)}{\cos(\pi + \alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha,$$

значит, функция $\operatorname{tg}\alpha$ имеет период π. Аналогично функция $\operatorname{ctg}\alpha$ имеет период π.

X. Для всех допустимых значений α выполняются равенства $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha$; $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha$.

Доказательство.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$$ аналогично доказывается второе равенство. ■

Пример 1*. Решить уравнение $\sin^{20} x + \cos^{13} x = 1$.

Решение.

По определению степени и из неравенства $|\sin\alpha| \leqslant 1$ следует, что $\sin^{20} x \leqslant \sin^2 x$, а из неравенства $|\cos\alpha| \leqslant 1$ следует, что $\cos^{13} x \leqslant \cos^2 x$. Значит, $\sin^{20} x + \cos^{13} x \leqslant \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

При этом равенство $\sin^{20} x + \cos^{13} x = 1$ может выполняться, только если $\sin^{20} x = \sin^2 x$ и $\cos^{13} x = \cos^2 x$. Последнее возможно, только если $\cos x = 0$ или $\cos x = 1$. Значит, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ или $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Осталось заметить, что при этих значениях x выполняется равенство $\sin^{20} x = \sin^2 x$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 2*. Докажите, что ни для какого угла сумма его синуса, косинуса, тангенса и котангенса не может равняться нулю.

Доказательство.

Нужно доказать, что для любого $\alpha \in \boldsymbol{R}$ выполняется неравенство:
$\sin\alpha + \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha \neq 0$.

Пусть $\operatorname{tg}\alpha > 0$, тогда $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ – два положительных числа. Применим к ним неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим: $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, то есть $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$. Получим: $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha \geqslant 2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha} = 2\sqrt{1} = 2$. Значит, равенство $\sin\alpha + \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 0$ возможно, только если $\sin\alpha + \cos\alpha \leqslant -2$.

Но $\sin\alpha \geqslant -1$ и $\cos\alpha \geqslant -1$, поэтому неравенство $\sin\alpha + \cos\alpha \leqslant -2$ может выполняться, когда $\sin\alpha = \cos\alpha = -1$. Это невозможно в силу основного тригонометрического тождества.

Если $\operatorname{tg}\alpha < 0$, то $\operatorname{ctg}\alpha < 0$ и, значит, $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = -(-\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha) \leqslant -2$. И для равенства $\sin\alpha + \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 0$ аналогично требуется, чтобы $\sin\alpha = \cos\alpha = 1$, что невозможно. ■

Используя доказанные нами свойства, выпишем **простейшие тригонометрические тождества:**

для синуса	для косинуса	для тангенса	для котангенса
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$		$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$	
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$
$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$	$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$	$\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \operatorname{ctg}\alpha$
$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$		
$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$		
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$	$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha$

Пример 3. Упростить выражение $\sin(3\pi + \alpha) + \sin(7\pi - \alpha) + \sin(\alpha - 8\pi)$.

Решение.

Воспользуемся свойствами синуса.
$\sin(3\pi + \alpha) = \sin(2\pi + \pi + \alpha) = \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$.
$\sin(7\pi - \alpha) = \sin(3 \cdot 2\pi + \pi - \alpha) = \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$.
$\sin(\alpha - 8\pi) = \sin(\alpha - 4 \cdot 2\pi) = \sin\alpha$.
Поэтому $\sin(3\pi + \alpha) + \sin(7\pi - \alpha) + \sin(\alpha - 8\pi) = -\sin\alpha + \sin\alpha + \sin\alpha = \sin\alpha$.

Ответ: $\sin\alpha$.

Пример 4. Упростить выражение $\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$.

Решение.

Представим выражение в виде квадрата суммы и применим основное тригонометрическое тождество:

$\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = 1^2 = 1$.

Ответ: 1.

К **449** 1) Изобразите множество точек, удовлетворяющих уравнению: $x^2 + y^2 = 1$.

2) Вспомните основное тригонометрическое тождество, которое выполняется для синуса и косинуса острого угла. Докажите, что оно выполняется для синуса и косинуса произвольного числового аргумента.

На что вы можете опираться для проведения доказательства? Проверьте правильность проведенных вами рассуждений по учебнику.

450 Упростите выражения:

а) $\sin(11\pi + \alpha)$; в) $\operatorname{tg}(3\pi + \alpha)$;

б) $\cos(\alpha - 7\pi)$; г) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

451 Упростите выражения:

а) $\sin^4\alpha + \cos^2\alpha - \cos^4\alpha$;

б) $\operatorname{tg}\alpha\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}\alpha\sin^2\alpha$.

452 Какие значения может принимать выражение:

а) $1 - |\sin\alpha|$; б) $|1 + 2\cos\alpha|$?

П **453** Разложите на множители:

а) $m\sqrt{m} - n\sqrt{n}$; б) $\sqrt[4]{x^8} - 4\sqrt[4]{x}$; в) $\sqrt{n} + 18\sqrt[4]{vs} + 81\sqrt{s}$.

454 Избавьтесь от иррациональности в знаменателях дробей:

а) $\frac{3}{3 - \sqrt[3]{3}}$; б) $\frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt[4]{5} + 1}$; в) $\frac{3}{\sqrt[6]{4} + 1}$.

455 Упростите выражения:

а) $\frac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}}{a + b} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}$;

б) $\left(\frac{\sqrt{a} + 2}{a + 2\sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a} - 2}{a - 1}\right) \cdot \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a}}$.

Д **456** Упростите выражения:

а) $\sin(\alpha - 7\pi)$; в) $\operatorname{tg}(10\pi - \alpha)$;

б) $\cos(6\pi - \alpha)$; г) $\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right)$.

457 Упростите выражения:

а) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

б) $\operatorname{tg}(3\pi - \alpha)\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}(2\pi + \alpha)$.

458 Избавьтесь от иррациональности в знаменателях дробей:

а) $\frac{2}{2 + \sqrt[3]{2}}$; б) $\frac{39}{3 - \sqrt[4]{3}}$; в) $\frac{4}{\sqrt[6]{5} - 1}$.

С **459*** Синус и косинус некоторого угла оказались различными корнями квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c = 0$. Докажите, что $b^2 = a^2 + 2ac$.

4. Выражение одних тригонометрических функций через другие

Наука есть не только знание, но и сознание, то есть умение пользоваться знанием как следует.

Василий Осипович Ключевский (1841–1911), русский историк

Часто для удобства вычислений или упрощения некоторых выражений требуется выразить одну тригонометрическую функцию через другую функцию того же аргумента. В пункте 5.1.3 мы доказали, что для тригонометрических функций выполняется основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. С помощью него можно выразить $\sin\alpha$ через $\cos\alpha$, и наоборот:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha};$$

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}.$$

Знак + или – в полученных равенствах определяется четвертью, в которой лежит соответствующий угол.

Попробуем найти и менее очевидные равенства, вытекающие из основного тригонометрического тождества.

Разделив обе части тригонометрического тождества на $\cos^2\alpha$, получим:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Это равенство позволяет выразить $\operatorname{tg}\alpha$ через $\cos\alpha$, и наоборот.

Разделив обе части тригонометрического тождества на $\sin^2\alpha$, получим равенство $\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$, связывающее $\sin\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

Доказанное нами ранее тождество $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$ позволяет выразить $\operatorname{tg}\alpha$ через $\operatorname{ctg}\alpha$, и наоборот.

Рассмотрим примеры применения полученных нами тождеств.

Пример 1.

Пусть $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$, причем угол α лежит в III четверти. Найти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

Решение.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = 2.$$

Так как $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, то $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = \dfrac{4}{5}$, поэтому $\cos\alpha = \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Но в III четверти $\cos\alpha < 0$, поэтому $\cos\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Тогда $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Пример 2.

Пусть $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, причем угол α лежит во II четверти. Найти $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

Решение.

$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\dfrac{1}{3}} = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Но во II четверти $\sin\alpha > 0$, поэтому $\sin\alpha = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$;

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \sqrt{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Пример 3.

Пусть $\operatorname{ctg}\alpha = -3$, причем угол α лежит в IV четверти. Найти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.

Решение.

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = -\dfrac{1}{3}$;

Так как $\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$, то $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} = 10$, поэтому $\sin\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Но в IV четверти $\sin\alpha < 0$, поэтому $\mathrm{in}\,\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Тогда $\cos\alpha = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \sin\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

Пример 4.

Пусть $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$, причем угол α лежит в I четверти. Найти $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

Решение[7]:

В I четверти $\cos\alpha > 0$, поэтому

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{6-2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$.

К **460** Выразите из известного вам тождества $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$: а) $\operatorname{tg}\alpha$; б) $\operatorname{ctg}\alpha$. Зная, что $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{4}$, найдите значение $\operatorname{ctg}\alpha$.

461 Выразите из основного тригонометрического тождества $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
а) $\sin\alpha$; б) $\cos\alpha$.

462 1) С помощью каких преобразований можно из основного тригонометрического тождества получить тождество $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$?

2) Попробуйте с помощью аналогичных преобразований получить равенство, связывающее $\sin\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

---

[7] Позже мы покажем, что $\operatorname{tg} 18° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. Значит, в ходе этого решения мы нашли $\cos 18°$, $\operatorname{tg} 18°$, $\operatorname{ctg} 18°$.

463 Пусть $\operatorname{tg}\alpha = -5$, причем угол α лежит в IV четверти. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

464 Пусть $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, причем угол α лежит в III четверти. Найдите $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

465 Пусть $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{7}}$, причем угол α лежит в II четверти. Найдите $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

466 Пусть $\operatorname{ctg}\alpha = 4$, причем угол α лежит в I четверти. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.

П **467** Постройте графики функций:

а) $y = \sqrt[4]{x+1}$; в) $y = \sqrt[7]{x} + 2$;

б) $y = \sqrt[4]{x} + 1$; г) $y = \sqrt[7]{x+2} - 2$.

468 Постройте график функции:

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{x}, \text{ если } -1 < x \leqslant 8; \\ -\dfrac{1}{x}, \text{ если } x \leqslant -1. \end{cases}$$

Определите с помощью графика:

а) наибольшее значение функции на области определения;

б) наименьшее значение функции на области определения;

в) промежутки знакопостоянства;

г) промежутки возрастания и убывания функции.

469 Решите графически уравнение: $\sqrt{2x+5} = 5 - x$.

Д **470** Пусть $\operatorname{tg}\alpha = 6$, причем угол α лежит в I четверти. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

471 Пусть $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$, причем угол α лежит во II четверти. Найдите $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

472 Пусть $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, причем угол α лежит в III четверти. Найдите $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

473 Пусть $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, причем угол α лежит в IV четверти. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.

474 Постройте график функции $y = \sqrt[6]{x} - 2$.

475 Функция задана правилом:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[4]{x} + 1, \text{ если } x > 8; \\ x^2 + 1x - 1, \text{ если } 3 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

1) Определите $f(-4)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(16)$.

2) Постройте график функции и определите с помощью него:

а) наибольшее и наименьшее значения функции на области определения;

б) промежутки возрастания и убывания функции.

С **476*** Найдите наибольшее значение функции $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$.

Экспресс-тест № 9

Примерное время выполнения – 20 минут

Часть А

№ 1

№ 1. Найдите верные утверждения:

А) $\cos\alpha$ – это ордината точки тригонометрической окружности;

Б) $\cos\alpha$ – это абсцисса точки тригонометрической окружности;

В) $\sin\alpha$ – это ордината точки тригонометрической окружности;

Г) $\sin\alpha$ – это абсцисса точки тригонометрической окружности.

№ 2		
1	2	3

№ 2. Установите соответствие между выражениями и их значениями:

1) $\cos^3\pi$; 2) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$; 3) $-\sin 0$.

А) 1; Б) 0; В) -1.

№ 3

№ 3. Какова радианная мера угла 120°?

А) π; Б) 2π; В) $\frac{2\pi}{3}$; Г) $\frac{5\pi}{6}$.

№ 4

№ 4. Чему равен $\cos 2\alpha$ при $\alpha = 30°$?

А) 60°; Б) $\frac{1}{2}$; В) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; Г) $\sqrt{3}$.

№ 5

№ 5. Какой четверти принадлежит угол $\alpha = 250°$?

А) I; Б) II; В) III; Г) IV.

Часть В

№ 6

№ 6 Чему равно значение $\sin^2 1° + \cos^2 1°$?

А) 1; Б) 2; В) 0; Г) $\mathrm{tg}^2 1°$.

№ 7

№ 7. Какой знак имеет выражение $\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \sin\alpha$, если $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

А) плюс;

Б) минус;

В) выражение может быть разных знаков;

Г) значение выражения равно нулю.

№ 8

№ 8. Какие значения может принимать выражение $\sin^2\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha$?

А) [0; 1]; Б) [–1; 0]; В) (0; 1]; Г) (–1; 0).

№ 9

№ 9. Какое выражение получится в результате упрощения выражения

$\sin^2 12° + \cos^2 12° + \mathrm{tg}^2 12°$?

А) $\frac{1}{\cos 12°}$; Б) $\frac{1}{\cos^2 12°}$; В) $\frac{1}{\sin^2 12°}$; Г) 1.

Часть С

(ход решения и ответ записывается на отдельном листе)

№ 10. Докажите, что числа $\frac{1}{\text{ctg}\frac{\pi}{6}}$; $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}$; $\frac{1}{\text{tg}\frac{\pi}{6}}$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

Ответы и решения к тесту:

<table>
<tr><th>№ 1</th><th colspan="3">№ 2</th><th>№ 3</th><th>№ 4</th><th>№ 5</th><th>№ 6</th><th>№ 7</th><th>№ 8</th><th>№ 9</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Б, В</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td rowspan="2">В</td><td rowspan="2">Б</td><td rowspan="2">В</td><td rowspan="2">А</td><td rowspan="2">Б</td><td rowspan="2">Г</td><td rowspan="2">Б</td></tr>
<tr><td>В</td><td>А</td><td>Б</td></tr>
<tr><td colspan="11">№ 10</td></tr>
</table>

1) Найдем значения выражений $\frac{1}{\text{ctg}\frac{\pi}{6}}$; $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}$; $\frac{1}{\text{tg}\frac{\pi}{6}}$

$$\frac{1}{\text{ctg}\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$\frac{1}{\text{tg}\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3}.$$

2) Докажем, что числа $\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\sqrt{3}$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

Для этого достаточно показать, что $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ является средним арифметическим предыдущего и последующего членов:

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}}{2}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\text{, ч. т.д.}$$

Шкала успешности:

11–12 баллов – *отлично*
8–10 баллов – *хорошо*
5–7 баллов – *удовлетворительно*

§ 2. Основные формулы тригонометрии. Тригонометрические преобразования

1. Тригонометрические функции от суммы и разности двух чисел

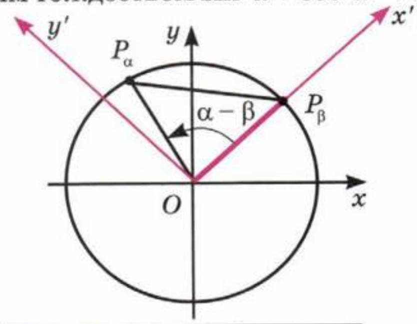
Лучше гор могут быть только горы,
На которых еще не бывал.

Владимир Семенович Высоцкий (1938–1980),
советский поэт, актер,
автор и исполнитель песен

В предыдущем пункте мы вывели несколько тождеств, которые помогали нам в преобразовании тригонометрических выражений. Однако это лишь часть существующих тригонометрических формул. В этом параграфе мы познакомимся с другими тригонометрическими формулами и научимся их применять.

Пусть нам необходимо, например, вычислить $\cos 15°$. Угол $15°$ является разностью углов $45°$ и $30°$, тригонометрические функции которых известны. Возникает вопрос, нельзя ли, используя их, вычислить значение $\cos 15°$. Оказывается, существует формула, которая позволяет это сделать. Выведем эту формулу (а также подобные ей формулы, выражающие косинус, синус, тангенс и котангенс суммы или разности двух чисел через их синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы).

Для этого воспользуемся основным тригонометрическим тождеством $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ и определением тригонометрических функций.



Рассмотрим на тригонометрической окружности в прямоугольной системе координат точки $P_\alpha(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$ и $P_\beta(\cos\beta;\ \sin\beta)$. Как известно, расстояние между точками $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ в прямоугольной системе координат равно $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$, поэтому длина отрезка $P_\alpha P_\beta$ равна

$$|P_\alpha P_\beta| = \sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2} =$$
$$= \sqrt{\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta} = \sqrt{2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)} \quad (1)$$

Введем теперь другую прямоугольную систему координат: ее начало в той же точке O, а положительный луч оси абсцисс Ox' совпадает с лучом OP_β (эта система координат выделена на рисунке цветом). В новой системе координат точка P_β имеет координаты $(1;\ 0)$, а точка P_α, полученная из нее поворотом плоскости вокруг точки O на угол $\alpha-\beta$, имеет координаты $(\cos(\alpha-\beta);\ \sin(\alpha-\beta))$. Значит, длина отрезка $P_\alpha P_\beta$, вычисленная в новой системе координат, равна:

$$|P_\alpha P_\beta| = \sqrt{(\cos(\alpha-\beta)-1)^2+(\sin(\alpha-\beta)-0)^2} =$$
$$= \sqrt{\cos^2(\alpha-\beta)-2\cos(\alpha-\beta)+1+\sin^2(\alpha-\beta)} = \sqrt{2-2\cos(\alpha-\beta)} \quad (2)$$

Из (1) и (2) имеем:

$\sqrt{2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)}=\sqrt{2-2\cos(\alpha-\beta)}$. Отсюда следует, что $\cos(\alpha-\beta)=$ $=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

Значит, для любых чисел α, β имеет место равенство:

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.}$$

После замены β на $-\beta$ с учетом четности функции косинус и нечетности функции синус получаем формулу косинуса суммы двух чисел:

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.}$$

Теперь мы можем легко получить формулу синуса суммы двух чисел.

Имеем: $\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=$

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$

Значит, для любых чисел α, β имеет место равенство:

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.}$$

После замены β на $-\beta$ получим формулу синуса разности двух чисел:

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.}$$

Теперь, опираясь на определение тангенса и котангенса, можем получить формулы тангенса и котангенса суммы и разности двух чисел (при всех допустимых значениях аргумента):

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Разделив числитель и знаменатель на $\cos\alpha\cos\beta$, получим:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Итак,

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.}$$

После замены β на $-\beta$, воспользовавшись нечетностью функции тангенс, получим:

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.}$$

Аналогично

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}=\frac{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}-1}{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Итак,

$$\boxed{\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}.}$$

После замены β на $-\beta$, воспользовавшись нечетностью функции котангенс, получим:

$$\boxed{\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}.}$$

Теперь мы можем вернуться к вычислению косинуса $15°$ и рассмотреть другие примеры применения полученных нами формул.

Пример.
Вычислить а) $\cos 15°$; б) $\sin 15°$; в) $\operatorname{tg} 15°$.

Решение.

а) $\cos 15° = \cos(45°-30°) = \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

б) $\sin 15° = \sin(45°-30°) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

в) Можно воспользоваться новой формулой:

$\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(45°-30°) = \frac{\operatorname{tg} 45° - \operatorname{tg} 30°}{1+\operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 30°}$, а можно вычисленными значениями синуса и косинуса:

$$\operatorname{tg} 15° = \frac{\sin 15°}{\cos 15°} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} : \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}{6-2} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4} = 2-\sqrt{3}.$$

К **477** 1) Значения каких из данных выражений вам известны:

а) $\cos 15°$; б) $\cos 45°$; в) $\cos 30°$; г) $\sin 45°$; д) $\sin 30°$?

Выразите угол $15°$ через углы, тригонометрические функции которых вам известны.

Можно ли, используя известные значения, вычислить $\cos 15°$? Какая формула вам понадобится?

2) Выберите из формул, выражающих косинус, синус суммы или разности двух чисел через их синусы, косинусы, нужную:

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$; $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$;

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$; $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

и вычислите $\cos 15°$, применяя выбранную вами формулу.

3) Познакомьтесь с выводом формул синуса и косинуса суммы или разности на стр. 147–148.

4) Попробуйте самостоятельно вывести формулы тангенса и котангенса суммы или разности. Сопоставьте выведенные вами формулы с формулами на стр. 148–149.

478 Вычислите $\sin 75°$.

479 Вычислите $\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$, если $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ и угол α из III четверти.

480 Вычислите $\sin(\alpha+\beta)$, если $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\beta=-\frac{5}{13}$ и $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$, $\beta\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$.

481 Упростите выражение: $\sin 20^\circ\cos 25^\circ+\sin 70^\circ\cos 65^\circ$.

П **482** Не решая уравнений, объясните, почему все эти уравнения не имеют корней.

а) $\sqrt[4]{x-4}+\sqrt[4]{x^2+4}=-4$; б) $\sqrt{5-x}+\sqrt{2-x}=-2$.

483 Решите уравнения:

а) $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{8}$; в) $\sqrt{x+2}=x$; д) $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}=3$;

б) $\sqrt{1-x^2}=2$; г) $(x+2)(x-7)\sqrt{x-5}=0$; е) $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$.

484 Решите уравнение: $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1$.

Д **485** Вычислите $\cos 75^\circ$.

486 Вычислите $\operatorname{ctg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$, если $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$ и угол α из IV четверти.

487 Вычислите $\cos(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, $\sin\beta=-\frac{7}{25}$ и $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, $\beta\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$.

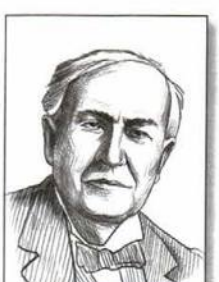
488 Упростите выражение: $\cos 20^\circ\cos 40^\circ-\cos 50^\circ\cos 70^\circ$.

489 Решите уравнения:

а) $\sqrt{x+2}=x$; б) $2\sqrt{x+5}=x-10$; в) $\sqrt[3]{x^3+7}=x+1$; г) $\sqrt[4]{x}+\sqrt[8]{x}-2=0$.

С **490*** В школьном турнире по волейболу каждая команда встречается с каждой по одному разу. После того как к числу участников добавилась одна команда, количество встреч, необходимых для проведения турнира, увеличилось на 20%. Сколько команд участвовало в первенстве?

2. Формулы приведения



Беспокойство – это неудовлетворенность, а неудовлетворенность – первейшее условие прогресса.

Томас Алва Эдисон (1847–1931), американский изобретатель и бизнесмен

Перепишем свойства II, III, IX, X из п. 5.1.3. и проанализируем их.

$\sin(\alpha+2\pi)=\sin\alpha$; $\cos(\alpha+2\pi)=\cos\alpha$; $\operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$;

$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$; $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$; $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha$;

$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$; $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$; $\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha$;

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$; $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$; $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha$.

Как мы видим, применение этих свойств позволяет переходить от вычисления тригонометрической функции одного угла к вычислению тригонометрической функции другого угла, для которого, например, значение этой функции известно.

Так, при вычислении синуса угла $\frac{13\neq}{6}$ можно представить этот угол в виде $2\pi+\frac{\pi}{6}$ и, воспользовавшись равенством $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$, перейти к углу, синус которого нам известен:

$$\sin\frac{13\pi}{6}=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

В этом пункте мы выведем так называемые **формулы приведения**, которые являются обобщением этих свойств. Они носят такое название, потому что позволяют переходить от вычисления тригонометрической функции любого заданного угла к вычислению тригонометрической функции удобного для нас угла, например расположенного в I четверти. Иначе говоря, мы «*приводим*» углы, от которых вычисляем тригонометрические функции, к углам из I четверти.

Начнем с того, что в силу периодичности функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ с периодом 2π, а функций $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ с периодом π, для всех допустимых значений α и для всех $k \in \boldsymbol{Z}$ имеют место равенства:

$\sin(2\pi k + \alpha) = \sin\alpha$; $\cos(2\pi k + \alpha) = \cos\alpha$; (1)

$\sin(2\pi k - \alpha) = -\sin\alpha$; $\cos(2\pi k - \alpha) = \cos\alpha$; (2)

$\operatorname{tg}(\pi k + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}(\pi k + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$; (3)

$\operatorname{tg}(\pi k - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}(\pi k - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$. (4)

Формулы (1) – (4) относятся к формулам приведения. Короче их можно записать так:

$\cos(2\pi k \pm \alpha) = \cos\alpha$;

$\sin(2\pi k \pm \alpha) = \pm\sin\alpha$; $\operatorname{tg}(\pi k \pm \alpha) = \pm\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}(\pi k \pm \alpha) = \pm\operatorname{ctg}\alpha$;

причем в последних трех формулах знаки берутся только верхние или только нижние, то есть если слева +, то справа +; если слева –, то справа –.

Кроме того, из формул для $\sin(\pi \pm \alpha)$ и $\cos(\pi \pm \alpha)$ следует также, что для всех α и для всех $k \in \boldsymbol{Z}$:

$\sin(2\pi k + \pi + \alpha) = -\sin\alpha$; $\cos(2\pi k + \pi + \alpha) = -\cos\alpha$;

$\sin(2\pi k + \pi - \alpha) = \sin\alpha$; $\cos(2\pi k + \pi - \alpha) = -\cos\alpha$.

Иными словами,

$\sin(\pi k + \alpha) = \pm\sin\alpha$, причем знак + берется в случае четного k, знак – в случае нечетного k. Это можно записать в следующем виде:

$\sin(\pi k + \alpha) = (-1)^k \sin\alpha,\ k \in \boldsymbol{Z}$. (5)

Аналогично

$\cos(\pi k + \alpha) = (-1)^k \cos\alpha,\ k \in \boldsymbol{Z}$; (6)

$\sin(\pi k - \alpha) = (-1)^{k+1} \sin\alpha,\ k \in \boldsymbol{Z}$; (7)

$\cos(\pi k - \alpha) = (-1)^k \cos\alpha,\ k \in \boldsymbol{Z}$ (8)

(при этом $(-1)^k = 1$ при четном k; $(-1)^k = -1$ при нечетном k).

Формулы (5) – (8) также относятся к формулам приведения. Их можно применять, пользуясь следующим математическим правилом:

$\sin(\pi k \pm \alpha) = \pm \sin\alpha$; $\cos(\pi k \pm \alpha) = \pm \cos\alpha$, $k \in \boldsymbol{Z}$, причем знак + или – в левой части равенств задается условием задачи, а знак + или – в правой части равенств подбирается так, чтобы при угле α, принадлежащем I четверти, знаки обеих частей равенств совпадали.

Пример 1. Упростить выражения:

а) $\sin(3\pi - \alpha)$; в) $\mathrm{tg}(6\pi - \alpha)$; д) $\cos(8\pi + \alpha)$;

б) $\cos(5\pi + \alpha)$; г) $\cos(9\pi - \alpha)$; е) $\mathrm{ctg}(7\pi + \alpha)$.

Решение.

а) $\sin(3\pi - \alpha) = \pm \sin\alpha$, но при α из первой четверти угол $3\pi - \alpha$ лежит во II четверти и $\sin(3\pi - \alpha) > 0$; так как и $\sin\alpha > 0$, то в правой частии равенства ставим знак +.

Ответ: $\sin(3\pi - \alpha) = \sin\alpha$.

б) $\cos(5\pi + \alpha) = -\cos\alpha$; в) $\mathrm{tg}(6\pi - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$; г) $\cos(9\pi - \alpha) = -\cos\alpha$;

д) $\cos(8\pi + \alpha) = \cos\alpha$; е) $\mathrm{ctg}(7\pi + \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha$.

Аналогичная, но более сложная картина имеет место при упрощении выражений вида: $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k \pm \alpha\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k \pm \alpha\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

В самом деле,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k + \alpha\right) = (-1)^k \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = (-1)^k\left(\sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{2}\sin\alpha\right).$$

Так как $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, то

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k + \alpha\right) = (-1)^k \cos\alpha,\ k \in \boldsymbol{Z} \tag{9}$$

Аналогично, пользуясь формулами синуса и косинуса суммы или разности двух чисел (или просто свойством VI из п. 5.1.2.), получим:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k - \alpha\right) = (-1)^k \cos\alpha,\ k \in \boldsymbol{Z}; \tag{10}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k + \alpha\right) = (-1)^{k+1} \sin\alpha,\ k \in \boldsymbol{Z}; \tag{11}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k - \alpha\right) = (-1)^k \sin\alpha,\ k \in \boldsymbol{Z}. \tag{12}$$

Формулы (9) – (12) также относятся к формулам приведения. Их можно также применять, пользуясь математическим правилом:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k \pm \alpha\right) = \pm\cos\alpha$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k \pm \alpha\right) = \pm\sin\alpha$, где $k \in \boldsymbol{Z}$, причем знак + или – в левой части равенств задается условием задачи, а знак + или – в правой части равенств подбирается так, чтобы при угле α, принадлежащем I четверти, знаки обеих частей равенства совпадали.

Пример 2. Упростить выражения:

а) $\sin\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)$; б) $\cos\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right)$; в) $\sin\left(\frac{11\pi}{2} + \alpha\right)$;

г) $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; д) $\cos\left(\frac{41\pi}{2}-\alpha\right)$; е) $\cos\left(-\frac{13\pi}{2}-\alpha\right)$.

Решение.

а) $\sin\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)=\pm\cos\alpha$, но при α из I четверти угол $\frac{7\pi}{2}-\alpha=2\pi+\frac{3\pi}{2}-\alpha$ лежит в III четверти и $\sin\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)<0$; так как $\cos\alpha>0$, то в правой части равенства ставим знак –.

Ответ: $\sin\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$.

б) $\cos\left(\frac{9\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$

(при α из I четверти угол $\frac{9\pi}{2}=4\pi+\frac{\pi}{2}$ лежит в I четверти).

в) $\sin\left(\frac{11\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$

(при α из I четверти угол $\frac{11\pi}{2}+\alpha=5\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha$ лежит в IV четверти).

г) $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$

(при α из I четверти угол $-\frac{3\pi}{2}+\alpha=-2\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha$ лежит в II четверти).

д) $\cos\left(\frac{41\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$

(при α из I четверти угол $\frac{41\pi}{2}-\alpha=20\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha$ лежит в I четверти).

е) $\cos\left(-\frac{13\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$

(при α из I четверти угол $-\frac{13\pi}{2}-\alpha=-6\pi-\frac{\pi}{2}-\alpha$ лежит в III четверти).

Аналогичные формулы имеют место при преобразовании выражений

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\pm\alpha\right)$, $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\pm\alpha\right)$.

В самом деле, при $k\in \mathbf{Z}$ и всех допустимых значениях α:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\pi k+\alpha\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha \qquad (13)$$

Аналогично

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\pi k-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha; \qquad (14)$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\pi k+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha; \qquad (15)$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\pi k-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha. \qquad (16)$$

Формулы (13) – (16) также относятся к формулам приведения. При всех допустимых значениях α и при всех $k \in \mathbf{Z}$ имеем:

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\pi k \pm \alpha\right)=\mp\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\pi k \pm \alpha\right)=\mp\operatorname{tg}\alpha$, где $k \in \mathbf{Z}$, причем знаки здесь берутся только верхние или только нижние, то есть если слева +, то справа –; если слева –, то справа +.

Пример 3. Упростить выражения:

а) $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)$; б) $\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)$; в) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{11\pi}{2}+\alpha\right)$; г) $\operatorname{ctg}\left(\frac{9\pi}{2}-\alpha\right)$.

Ответ: а) $-\operatorname{ctg}\alpha$; б) $\operatorname{ctg}\alpha$; в) $-\operatorname{tg}\alpha$; г) $\operatorname{tg}\alpha$.

Пример 4*. Упростить выражение: $\operatorname{tg}1^\circ \cdot \operatorname{tg}2^\circ \cdot \operatorname{tg}3^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg}87^\circ \cdot \operatorname{tg}88^\circ \cdot \operatorname{tg}89^\circ$.

Решение.

В данном выражении тангенсы всех углов, кроме $\operatorname{tg}45^\circ$, разбиваются на пары с произведением, равным 1:

$\operatorname{tg}1^\circ \cdot \operatorname{tg}89^\circ = \operatorname{tg}1^\circ \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - 1^\circ) = \operatorname{tg}1^\circ \cdot \operatorname{ctg}1^\circ = 1$,

$\operatorname{tg}2^\circ \cdot \operatorname{tg}88^\circ = \operatorname{tg}2^\circ \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - 2^\circ) = \operatorname{tg}2^\circ \cdot \operatorname{ctg}2^\circ = 1, \ldots$,

$\operatorname{tg}44^\circ \cdot \operatorname{tg}46^\circ = \operatorname{tg}44^\circ \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - 44^\circ) = \operatorname{tg}44^\circ \cdot \operatorname{ctg}44^\circ = 1$.

Кроме того, $\operatorname{tg}45^\circ = 1$. Значит, искомое произведение равно 1.

Ответ: 1.

Пример 5. Вычислить:

а) $\sin\left(\frac{53\pi}{6}\right)$; б) $\cos\left(-\frac{22\pi}{3}\right)$; в) $\operatorname{tg}\left(\frac{11\pi}{3}\right)$; г) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$.

Решение.

а) $\sin\left(\frac{53\pi}{6}\right)=\sin\left(8\pi+\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$;

б) $\cos\left(-\frac{22\pi}{3}\right)=\cos\frac{22\pi}{3}=\cos\left(7\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$;

в) $\operatorname{tg}\left(\frac{11\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\left(4\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$;

г) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{13\pi}{6}\right)=\operatorname{ctg}\left(-2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}$.

Ответ: а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $-\sqrt{3}$; г) $-\sqrt{3}$.

К **491** 1) Проанализируйте, каким образом проводились вычисления:

$\cos\frac{13\pi}{6}=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\frac{5\pi}{6}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Объясните, с помощью каких свойств косинуса был осуществлен переход от тригонометрической функции заданного угла к тригонометрической функции угла, расположенного в I четверти?

2) Какие еще свойства, полученные в п. 5.1.3, позволяют осуществлять подобный переход?

492 На какие две группы можно разбить формулы приведения ($k \in \boldsymbol{Z}$):

$\mathrm{tg}\,(\pi k \pm \alpha) = \pm\mathrm{tg}\,\alpha$; $\mathrm{ctg}\,(\pi k \pm \alpha) = \pm\mathrm{ctg}\,\alpha$;

$\sin\,(\pi k \pm \alpha) = \pm\,\sin\alpha$; $\cos\,(\pi k \pm \alpha) = \pm\,\cos\alpha$;

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi k\pm\alpha\right)=\pm\cos\alpha$; $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi k\pm\alpha\right)=\pm\sin\alpha$;

$\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi k\pm\alpha\right)=\mp\mathrm{ctg}\,\alpha$; $\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi k\pm\alpha\right)=\mp\mathrm{tg}\,\alpha$.

Объясните, каким образом выбирается знак в каждой из формул.

493 Упростите выражения:

а) $\sin\,(5\pi - \alpha)$; в) $\sin\,(3\pi - \alpha)$; д) $\cos\,(6\pi + \alpha)$;

б) $\cos\,(4\pi + \alpha)$; г) $\cos\,(7\pi - \alpha)$; е) $\sin\,(5\pi + \alpha)$.

494 Упростите выражения:

а) $\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}-\alpha\right)$; в) $\sin\left(\dfrac{17\pi}{2}+\alpha\right)$; д) $\cos\left(\dfrac{13\pi}{2}-\alpha\right)$;

б) $\cos\left(\dfrac{11\pi}{2}+\alpha\right)$; г) $\sin\left(-\dfrac{7\pi}{2}+\alpha\right)$; е) $\cos\left(-\dfrac{25\pi}{2}-\alpha\right)$.

495 Упростите выражения:

а) $\mathrm{tg}\left(\dfrac{13\pi}{2}+\alpha\right)$; в) $\mathrm{ctg}\left(-\dfrac{21\pi}{2}+\alpha\right)$;

б) $\mathrm{tg}\left(-\dfrac{13\pi}{2}-\alpha\right)$; г) $\mathrm{ctg}\left(\dfrac{13\pi}{2}-\alpha\right)$.

496 Вычислите:

а) $\sin\dfrac{23\neq}{6}$; б) $\cos\left(-\dfrac{43\pi}{3}\right)$; в) $\mathrm{tg}\dfrac{123\neq}{4}$; г) $\mathrm{ctg}\left(-\dfrac{1001\pi}{6}\right)$.

497 Найдите значение выражения $\dfrac{5\cos 145\Upsilon}{\cos 35\Upsilon}$.

498 Найдите значение выражения $\dfrac{3\cos(\pi-\alpha)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\alpha+3\pi)}$.

499 Определите, при каких значениях x выражение имеет смысл.

а) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+5}$; б) $\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}$; в) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-5}$; г) $\sqrt{(x-1)(x-5)}$.

500 Решите уравнения:

а) $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}=0$; б) $\sqrt{(x+1)(x-1)}=0$.

501 Решите уравнения:

а) $x\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{x^3}=2$; б) $2x^2+3x-5\sqrt{2x^2+3x+9}+3=0$.

502 Упростите выражения:

а) $\sin\,(11\pi - \alpha)$; в) $\sin\,(22\pi - \alpha)$; д) $\cos\,(26\pi + \alpha)$;

б) $\cos\,(18\pi + \alpha)$; г) $\cos\,(17\pi - \alpha)$; е) $\sin\,(51\pi + \alpha)$.

503 Упростите выражения:

а) $\sin\left(\frac{15\pi}{2}-\alpha\right)$; в) $\sin\left(\frac{27\pi}{2}+\alpha\right)$; д) $\cos\left(\frac{43\pi}{2}-\alpha\right)$;

б) $\cos\left(\frac{19\pi}{2}+\alpha\right)$; г) $\sin\left(-\frac{17\pi}{2}+\alpha\right)$; е) $\cos\left(-\frac{55\pi}{2}-\alpha\right)$.

504 Упростите выражения:

а) $\mathrm{tg}\left(\frac{123\pi}{2}+\alpha\right)$; б) $\mathrm{tg}\left(-\frac{101\pi}{2}-\alpha\right)$; в) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{321\pi}{2}+\alpha\right)$; г) $\mathrm{ctg}\left(\frac{1001\pi}{2}-\alpha\right)$.

505 Вычислите:

а) $\sin\frac{25\neq}{4}$; б) $\cos\left(-\frac{37\pi}{6}\right)$; в) $\mathrm{tg}\frac{321\neq}{2}$; г) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{777\pi}{3}\right)$.

506 Найдите значение выражения $\frac{7\cos 211\Upsilon}{\cos 31\Upsilon}$.

507 Решите уравнения:

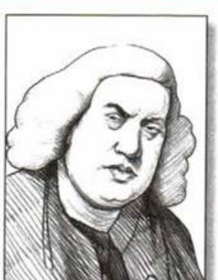
а) $\sqrt{x-x^2+1}=\frac{1}{2}$; б) $\sqrt{x+2}=\sqrt{2x-5}$; в) $\sqrt[3]{x^2-9x-30}=-2$; г) $\sqrt[3]{x^2+11x+1}=-3$.

508 Решите уравнения, применяя метод замены неизвестного:

а) $2\sqrt[3]{x}+5\sqrt[6]{x}-18=0$; б) $2\sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{x^2-2x+9}=1$.

C **509*** Найдите количество трехзначных чисел, в десятичной записи которых участвует ровно одна цифра 3.

3. Тригонометрические функции двойного, тройного и половинного аргумента



Запоминать умеет тот, кто умеет быть внимательным.

Самюэл Джонсон (1709–1784),
английский писатель

В этом пункте мы познакомимся с новыми тригонометрическими формулами. Полагая в формулах для $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$, $\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)$ значение β равным α, получим формулы двойного аргумента:

$$\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha=\mathrm{tg}(\alpha+\alpha)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}=\frac{2\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha};$$

$$\mathrm{ctg}\,2\alpha=\mathrm{ctg}(\alpha+\alpha)=\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha-1}{\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha}=\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}{2\mathrm{ctg}\,\alpha}.$$

Итак, при всех допустимых значениях α имеем так называемые

формулы двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}; \qquad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством, формулу косинуса двойного аргумента можно переписать в других формах:

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$

или

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha.$

Отсюда:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1; \qquad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

Подставляя в формулы для $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$ значение β, равное 2α, получим формулы тройного аргумента:

$\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin\alpha\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\cos\alpha =$
$= \sin\alpha(1-2\sin^2\alpha) + 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha = \sin\alpha - 2\sin^3\alpha + 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) =$
$= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$

$\cos 3\alpha = \cos(\alpha + 2\alpha) = \cos\alpha\cos 2\alpha - \sin\alpha\sin 2\alpha =$
$= \cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1) - \sin\alpha\, 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha(1-\cos^2\alpha) =$
$= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}(\alpha+2\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha\cdot(1-\operatorname{tg}^2\alpha)+2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Итак, при всех допустимых значениях α имеем так называемые

формулы тройного угла

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha; \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha; \qquad \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$$

Попробуйте получить аналогичную формулу для $\operatorname{ctg} 3\alpha$ самостоятельно.

Пример 1. Известно, что $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, угол α из II четверти. Найти $\cos\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$.

Решение.

1) $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{4}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ (здесь учтено, что $\cos\alpha < 0$).

2) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$;

3) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2\cdot\frac{4}{9} = \frac{1}{9}$;

4) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 3\cdot\frac{2}{3} - 4\cdot\frac{8}{27} = \frac{22}{27}$;

5) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = 4\cdot\left(-\frac{5\sqrt{5}}{27}\right) + 3\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} = -\frac{20}{27}\sqrt{5} + \sqrt{5} = \frac{7}{27}\sqrt{5}$.

Замечание. Значения $\cos 2\alpha$ и $\sin 3\alpha$ находятся только по значению $\sin\alpha$, независимо от того, в какой четверти лежит угол. Для нахождения $\cos\alpha$, $\sin 2\alpha$ и $\cos 3\alpha$ эта информация о четверти необходима. Было бы ошибкой искать $\cos 3\alpha$ по формуле $\pm\sqrt{1-\sin^2 3\alpha}$, так как знак перед корнем установить невозможно (неизвестно, в какой четверти лежит угол 3α). В самом деле, если угол α лежит во II четверти, то угол 3α может лежать в разных четвертях: если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$, то $\frac{3\pi}{2} < 3\alpha < 2\pi$ – угол 3α лежит в IV четверти; если $\frac{2\pi}{3} < \alpha < \frac{5\pi}{6}$, то $2\pi < 3\alpha < \frac{5\pi}{2}$ – угол 3α лежит в I четверти; если $\frac{5\pi}{6} < \alpha < \pi$, то $\frac{5\pi}{2} < 3\alpha < 3\pi$ – угол 3α лежит во II четверти.

Используя формулы двойного угла, можно вывести формулы половинного аргумента.

Так как $\cos\alpha = \cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$, то $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$.

Так как $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, то $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$.

Отсюда следует, что $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$; $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$.

Знак + или – в этих формулах выбирается в зависимости от того, в какой четверти лежит угол $\frac{\alpha}{2}$. Так, для косинуса, если $\frac{\alpha}{2}$ лежит в первой или четвертой четверти, выбираем знак плюс, а если во второй или третьей – минус.

Можно получить также формулы для тангенса и котангенса половинного аргумента, не содержащие знака $\pm$.

В самом деле, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$;

иначе: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Итак, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Взяв обратную величину, получим:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

Все формулы для $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ справедливы только при допустимых значениях α.

Итак, при всех допустимых значениях α имеем так называемые

формулы половинного угла

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};\qquad \sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}};\qquad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};\qquad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

Пример 2. Известно, что $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha>0$. Найти $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Решение.

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$; $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$. Поэтому $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{3}{5}}{1+\frac{4}{5}}=\frac{1}{3}$. А вот значения $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$ однозначно определить по данным задачи нельзя. В самом деле,

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{10}};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}}=\pm\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Знак $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$ определить по данным задачи невозможно. Так как $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha>0$, то угол α лежит в I четверти. Если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$; угол $\frac{\alpha}{2}$ также лежит в I четверти; $\sin\frac{\alpha}{2}>0$, $\cos\frac{\alpha}{2}>0$.

Если $2\pi<\alpha<\frac{5\pi}{2}$ (а это тоже I четверть), то $\pi<\frac{\alpha}{2}<\frac{5\pi}{4}$, угол $\frac{\alpha}{2}$ лежит в III четверти; $\sin\frac{\alpha}{2}<0$, $\cos\frac{\alpha}{2}<0$.

* * *

Заметим, что все тригонометрические функции ($\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$) рационально выражаются через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, т.е. значения всех тригонометрических функций можно выразить через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и постоянные величины при помощи арифметических операций (сложения, вычитания, умножения и деления). В самом деле, из формулы тангенса двойного угла следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \text{поэтому}\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Далее, $\sin\alpha = \dfrac{\sin\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)}{1} = \dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. Разделив числитель и знаменатель последней дроби на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$, получим: $\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

Аналогично $\cos\alpha = \dfrac{\cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)}{1} = \dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

Итак, имеем следующие формулы:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}; \qquad \sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \qquad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Все эти формулы справедливы при любых допустимых значениях α. Отметим, что при переходе от $\sin\alpha$ к $\cos\alpha$ (которые определены при всех α) к выражениям через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ область определения выражения сужается. Это надо учитывать, например, при решении уравнений с помощью замены $\sin x$ и $\cos x$ на их выражения через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Пример 3. Известно, что $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2}$. Найти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

Решение.

$$\sin\alpha = \frac{2\cdot\frac{3}{2}}{1+\frac{9}{4}} = \frac{12}{13}; \quad \cos\alpha = \frac{1-\frac{9}{4}}{1+\frac{9}{4}} = \frac{5}{13}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{12}{5}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{12}.$$

Пользуясь найденными формулами, найдем значения тригонометрических функций некоторых углов.

Пример 4. Найти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если угол α равен:

а) $\frac{\pi}{12} = 15^\circ$; б) $\frac{\pi}{8} = 22{,}5^\circ$; в*) $\frac{\pi}{10} = 18^\circ$.

Решение.

а) Напомним, что тригонометрические функции угла 15° мы уже вычисляли выше. Попробуем сделать это иначе (при помощи новых формул).

Если $\beta = \frac{\pi}{6}$, то $\frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{2}$. Так как $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а угол $\frac{\beta}{2}$ лежит в I четверти, то

$$\cos\alpha = \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

Аналогично

$$\sin\alpha = \sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Далее, $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{\dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}}=\sqrt{\dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{1}}=2-\sqrt{3}$;

$\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$.

б) Рассуждая аналогично, при $\beta=\dfrac{\pi}{4}$ получим:

$$\cos\alpha=\cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};$$

$$\sin\alpha=\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}}=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{1}}=\sqrt{2}-1;$$

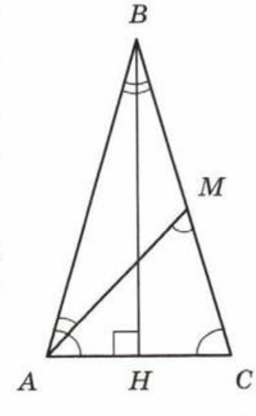
$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1.$$

в*) Здесь решение сводится к уравнению 4-й степени. В самом деле, если $\alpha=18^\circ$, то $4\alpha=72^\circ$, т.е. $4\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$. Тогда $\sin\alpha=\cos 4\alpha=\cos(2\cdot 2\alpha)=2\cos^2 2\alpha-1=2(1-2\sin^2\alpha)^2-1=8\sin^4\alpha-8\sin^2\alpha+1$. Поэтому $x=\sin\alpha$ является корнем уравнения $8x^4-8x^2-x+1=0$. Разложим многочлен 4-й степени на множители. Очевидным корнем является $x=1$.

Тогда $8x^4-8x^2-x+1=8x^2(x-1)(x+1)-(x-1)=(x-1)(8x^3+8x^2-1)$. Кубический многочлен $8x^3+8x^2-1$ имеет корень $x=-\dfrac{1}{2}$. Его можно найти, применив известную нам процедуру поиска рациональных корней. Разложив на множители, получим:

$8x^3+8x^2-1=8x^3+1+8x^2-2=(2x+1)(4x^2-2x+1)+2(2x-1)(2x+1)=$
$=(2x+1)(4x^2+2x-1)$.

Уравнение 4-й степени примет вид: $(x-1)(2x+1)(4x^2+2x-1)=0$. Оно имеет 4 корня: $x_1=1$, $x_2=-\dfrac{1}{2}$, $x_3=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$, $x_4=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$. Но $\sin 18^\circ>0$ и не равен 1. Остается единственная возможность: $\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. Значения $\cos 18^\circ$, $\operatorname{tg} 18^\circ$, $\operatorname{ctg} 18^\circ$ по известному $\sin 18^\circ$ были вычислены в примере 3 п. 5.1.4.



Приведем теперь более изящный – геометрический вывод равенства $\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с углами $\angle A=\angle C=72^\circ$, $\angle B=36^\circ$ и проведем в нем биссектрису AM. Так как $\angle C=72^\circ$, $\angle CAM=36^\circ$, $\angle AMC=72^\circ$, то треугольник ABC подобен треугольнику CAM и $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AC}{MC}$.

Пусть $AB=a$, BH – высота, следовательно, биссектриса и медиана в равнобедренном ΔABC, тогда $AH=a\cdot\sin 18^\circ$, $AC=2a\cdot\sin 18^\circ$. Так как треугольники ABM и AMC также равнобедренные, то

$BM=AM=AC=2a\cdot\sin 18^\circ$,
$MC=BC-BM=AB-BM=a-2a\cdot\sin 18^\circ$.

Записанная выше пропорция примет вид: $\frac{a}{2\cdot a\cdot\sin 18^\circ}=\frac{2\cdot a\cdot\sin 18^\circ}{a-2\cdot a\cdot\sin 18^\circ}$, то есть $1-2\cdot\sin 18^\circ=(2\cdot\sin 18^\circ)^2$.

Если обозначить $\sin 18^\circ = x$, то получим уравнение $4x^2 + 2x - 1 = 0$, имеющее положительный корень $x=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

К **510** а) Известно, что $\sin\alpha=\frac{1}{3}$. Найдите $\sin 2\alpha$. Какая формула понадобится для выполнения этого задания? Представив $\sin 2\alpha$ как $\sin(\alpha+\alpha)$, выведите ее и выполните задание.

б) Известно, что $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, найдите $\sin 3\alpha$. Какая формула понадобится для выполнения этого задания? Выведите ее и выполните задание.

в) Познакомьтесь с формулами двойного и тройного угла остальных функций.

511 Найдите значение выражения $\frac{12\sin 12\Upsilon\cos 12\Upsilon}{\sin 24\Upsilon}$.

512 Найдите значение выражения $\frac{5\sin^2 77^\circ-5\sin^2 13^\circ}{\cos 26^\circ}$.

513 Докажите тождество: $\cos 3\alpha\cos^3\alpha+\sin 3\alpha\sin^3\alpha=\cos^3 2\alpha$.

П **514** Решите неравенства:

а) $\sqrt{5-2x}>4$; б) $\sqrt[4]{x-5}<1$; в) $\sqrt[5]{4-x}\leqslant -2$; г) $\sqrt[6]{2x+3}\leqslant -1$.

515 Решите неравенства:

а) $\sqrt{9x-x^2-19}\geqslant 1$; б) $\sqrt{16-x^2}\leqslant 3$; в) $\sqrt[3]{x^2+4x-22}>-1$.

516 Решите неравенства:

а) $\sqrt{x^2-4x}>x-3$; в) $\sqrt{3x-x^2}<4-x$; д) $(x-3)\sqrt{x^2-x-2}\leqslant 0$;

б) $\sqrt{15-x}<3-x$; г) $\sqrt{-x}(x+1)>0$; е) $(x^2-6x-7)\sqrt{x-3}\geqslant 0$.

Д **517** Найдите значение выражения $\frac{7{,}5\sin 7{,}5\Upsilon\cos 7{,}5\Upsilon}{\sin 15\Upsilon}$.

518 Найдите значение выражения $\frac{7\cos^2 66^\circ-7\cos^2 24^\circ}{\sin 42^\circ}$.

519 Решите неравенства:

а) $\sqrt{x-8}>3$; б) $\sqrt[4]{125-2x}<\sqrt{15}$; в) $\sqrt[3]{0{,}5x-1}\leqslant -0{,}5$; г) $\sqrt[4]{x-3}\leqslant -2$.

520 Решите неравенства:

а) $\sqrt{x^2-14x-16}\geqslant 4$; б) $\sqrt{x^2-9}<4$; в) $\sqrt[3]{x^2+15x+18}<-2$.

С **521*** Пусть $\cos x\neq 0$. Докажите неравенство $\left|\frac{\cos 2x+3}{\cos x}\right|\geqslant 4$.

4. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму и суммы в произведение

В науке нет другого способа приобретения, как в поте лица; ни порывы, ни фантазии, ни стремления всем сердцем не заменяют труда.

Александр Иванович Герцен (1812–1870), русский писатель, философ, публицист

В предыдущем пункте, используя формулы суммы, мы получили формулы двойного, тройного и половинного углов. Оказывается, отталкиваясь от формул суммы и разности, можно получить еще целый ряд полезных формул. Запишем формулы синуса и косинуса суммы и разности двух чисел:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta; \qquad (1)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta; \qquad (2)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta; \qquad (3)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \qquad (4)$$

Если сложить равенства (1) и (2), то получим:

$$\boxed{\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right).} \qquad (5)$$

Если сложить равенства (3) и (4), то получим:

$$\boxed{\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right).} \qquad (6)$$

Если из равенства (3) вычесть равенство (4), то получим:

$$\boxed{\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right).} \qquad (7)$$

Формулы (5) – (7) называются **формулами преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.**

Положим теперь в этих формулах $\alpha+\beta=x$, $\alpha-\beta=y$. Тогда $\alpha=\frac{x+y}{2}$, $\beta=\frac{x-y}{2}$.

Равенство (5) перепишется так:

$$\boxed{\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.} \qquad (8)$$

Заменив y на $-y$, получим в силу нечетности функции синус:

$$\boxed{\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}.} \qquad (9)$$

Равенства (6) и (7) перепишутся так:

$$\boxed{\cos x+\cos y=2\cos\alpha\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.} \qquad (10)$$

$$\boxed{\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.} \qquad (11)$$

Формулы (8) – (11) называются **формулами преобразования суммы тригонометрических функций в произведение.**

Рассмотрим примеры применения этих формул.

Пример 1. Вычислить значение выражения $\sin 7{,}5^\circ\cdot\cos 52{,}5^\circ$.

Решение.

Воспользуемся формулой (5):

$$\sin 7{,}5^\circ\cdot\cos 52{,}5^\circ=\frac{1}{2}(\sin(7{,}5^\circ+52{,}5^\circ)+\sin(7{,}5^\circ-52{,}5^\circ))=\frac{1}{2}(\sin 60^\circ+\sin(-45^\circ))=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}.$$

Пример 2. Преобразовать в произведение тригонометрических функций выражение: $\cos 2\alpha-\cos 3\alpha-\cos 4\alpha+\cos 5\alpha$.

Решение.

Представим исходное выражение в виде:

$\cos 2\alpha-\cos 3\alpha-\cos 4\alpha+\cos 5\alpha=(\cos 2\alpha-\cos 4\alpha)+(\cos 5\alpha-\cos 3\alpha)$.

Так как

$$\cos 2\alpha-\cos 4\alpha=-2\sin\frac{2\alpha+4\alpha}{2}\sin\frac{2\alpha-4\alpha}{2}=-2\sin 3\alpha\sin(-\alpha)=2\sin 3\alpha\sin\alpha,$$

$$\cos 5\alpha-\cos 3\alpha=-2\sin\frac{5\alpha+3\alpha}{2}\sin\frac{5\alpha-3\alpha}{2}=-2\sin 4\alpha\sin\alpha,$$

то

$$\cos 2\alpha-\cos 3\alpha-\cos 4\alpha+\cos 5\alpha=2\sin 3\alpha\sin\alpha-2\sin 4\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha(\sin 3\alpha-\sin 4\alpha)=$$

$$=2\sin\alpha\left(2\cos\frac{3\alpha+4\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha-4\alpha}{2}\right)=4\sin\alpha\cos\frac{7\alpha}{2}\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)=-4\sin\alpha\cos\frac{7\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Пример 3. Доказать, что для всех $x, y\in\boldsymbol{R}$ выполняются неравенства:

а) $|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|$;

б) $|\cos x-\cos y|\leqslant|x-y|$.

Доказательство.

а) Преобразуем разность синусов в произведение, применив формулу 9:

$$|\sin x-\sin y|=\left|2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\right|$$

Для оценки значения этого выражения воспользуемся тем, что для всех $\alpha\in\boldsymbol{R}$ выполняются неравенства $|\sin\alpha|\leqslant|\alpha|$ и $|\cos\alpha|\leqslant 1$ (свойства V и VI в п. 5.1.3)):

$$\left|2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\right|\leqslant 2\cdot\left|\frac{x-y}{2}\right|\cdot 1=|x-y|.$$

б) Аналогично

$$|\cos x-\cos y|=\left|2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right|\leqslant 2\cdot\left|\frac{x-y}{2}\right|\cdot 1=|x-y|.$$

* * *

Пример 4*.

Доказать, что при всех $x \neq 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, выполняется равенство:

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}},\ n \in \mathbf{N}.$$

Доказательство.

Обозначим сумму в левой части равенства через S. При $x \neq 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, значение $\frac{x}{2} \neq \pi k$ и $\sin\frac{x}{2} \uparrow 0$. Тогда $S \cdot 2\sin\frac{x}{2}=\left(\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx\right)\cdot 2\sin\frac{x}{2}=$

$$=\sin\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos x+2\sin\frac{x}{2}\cos 2x+\ldots+2\sin\frac{x}{2}\cos nx.$$

В силу равенства (5),

$$S\cdot 2\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{3x}{2}-\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{5x}{2}-\sin\frac{3x}{2}+\ldots+\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x$$

(остальные слагаемые в сумме дают ноль). Поэтому $S=\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$.

522 Какие из выписанных ниже формул верные?

1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$;

2) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$;

3) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$;

4) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$.

5) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\sin\beta+\sin\alpha\cdot\cos\beta$.

6) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$.

523 1) Сложите первые два верных равенства из предыдущего задания, выполните преобразования и получите новую тригонометрическую формулу:

$\sin\alpha\cos\beta=$...

Какой переход помогает осуществлять эта формула?

2) Каким образом получить формулу для произведения косинусов, произведения синусов? Выполните нужные преобразования и получите формулы:

$\cos\alpha\cos\beta=$...

$\sin\alpha\sin\beta=$...

3) Проверьте правильность своих рассуждений, сверив полученные вами формулы с формулами преобразования произведения тригонометрических функций в сумму на стр. 163.

524 Упростите выражения:

а) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$; б) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$.

525 Преобразуйте в произведение тригонометрических функций сумму $\sin 4\alpha + \sin 6\alpha + \sin 8\alpha + \sin 10\alpha$.

526 Докажите тождество:

$$\sin 3\alpha = 4\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right).$$

П **527** Вычислите:

а) $\left(2^{-3}+\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\right):\left(\left(\frac{1}{6}\right)^{0}-18\cdot 3^{-4}\right)\cdot 1{,}4$;

б) $\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{0}-(0{,}1)^{-1}\right):\left(\left(\frac{3}{8}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right)$;

в) $\dfrac{\left(\frac{7}{16}\right)^{2}\cdot 56^{4}\cdot\left(\frac{1}{49}\right)^{2}-49}{\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}}$;

г) $\dfrac{\left(\frac{1}{24}\right)^{3}\cdot 27^{-2}\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^{-9}-80}{0{,}75^{-2}}$.

528 Упростите выражения:

а) $\dfrac{a^{-2}+b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}:\left(\dfrac{a+b}{ab}\right)^{-1}-b^{-2}$;   б) $(x^2y^{-3}+x^{-1}):(xy^{-2}-y^{-1}+x^{-1})-1$.

Д **529** Упростите выражения:

а) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}$;   б) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$.

530 Преобразуйте в произведение тригонометрических функций сумму $\cos^2\alpha + \cos^2\beta - \sin^2(\alpha+\beta)$.

531 Докажите тождество:

$$\cos 3\alpha = 4\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right).$$

532 Вычислите:

а) $\left(\left((61\cdot 64^{-1}-8^{-2})^{-1}\right):\frac{2}{15}\right)^{-1}$;   б) $\dfrac{3\cdot 2^{7}\cdot 4^{5}\cdot\left(\frac{1}{32}\right)^{2}+\frac{2^{5}}{4}}{245}$.

533 Упростите выражения:

а) $\dfrac{m^{-1}+n^{-1}}{m^{-2}-n^{-2}}:\left(\dfrac{1}{n^{-1}}-\dfrac{1}{m^{-1}}\right)^{-1}$;   б) $\dfrac{d^{-1}-q^{-1}}{d^{-3}+q^{-3}}:\left(\dfrac{qd^{-2}+dq^{-2}}{q-d}\right)^{-1}$.

С **534*** Докажите тождество:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta+\gamma)=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}.$$

5. Комбинированные преобразования выражений, содержащих тригонометрические функции

Быть человеком – значит не только обладать знаниями, но и делать для будущих поколений то, что предшествовавшие делали для нас.

Г.К. Лихтенберг (1742–1799), немецкий физик, астроном, публицист

В предыдущих пунктах мы вывели целый ряд тригонометрических формул, в этом пункте мы будем учиться их применять вместе с другими известными нам преобразованиями. Для этого рассмотрим несколько примеров характерных преобразований выражений, содержащих тригонометрические функции.

Пример 1. Доказать неравенства ($\alpha \in \boldsymbol{R}$):

а) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha \geqslant \frac{1}{2}$; б) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha \geqslant \frac{1}{4}$.

Доказательство.

а) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=1-\frac{(2\sin\alpha\cos\alpha)^2}{2}=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$.

Здесь мы применили формулу сокращенного умножения – выделив полный квадрат суммы, основное тригонометрическое тождество и формулу двойного угла.

Но по свойству V тригонометрических функций $|\sin 2\alpha| \leqslant 1$; значит, $\sin^2 2\alpha \leqslant 1$, и $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha \geqslant 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, ч.т.д.

б) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\cdot(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)=$

$$=1\cdot\left[(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-3\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\right]=1-\frac{(2\sin\alpha\cdot\cos\alpha)^2}{4}\cdot 3=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha \geqslant 1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}.$$

Здесь мы проводили аналогичные преобразования, только применили другую формулу сокращенного умножения, разложив на множители сумму кубов.

Пример 2. Доказать, что при всех $x \in \boldsymbol{R}$ выполняются равенства:

а) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$;

б) $\cos x-\sin x=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$.

Доказательство.

Учитывая, что $\frac{1}{\sqrt{2}}$ это значение $\cos\frac{\neq}{4}$ и $\sin\frac{\neq}{4}$, вынесем за скобки $\sqrt{2}$, далее применим формулу синуса суммы (для вывода второго равенства применим формулу приведения и четность косинуса).

а) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)=$

$$=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right);$$

б) $\cos x-\sin x=\sqrt{2}\left(\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)=$

$$=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right).\ \blacksquare$$

Пример 3.

Упростить выражения при всех допустимых значениях переменных:

а) $\sin^2\beta\cdot\operatorname{tg}\beta-\cos^2\beta\cdot\operatorname{ctg}\beta+2\operatorname{ctg}2\beta$;

б) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)+\frac{1}{2}\sin 2\alpha$;

в) $\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4\alpha}}$.

Решение.

а) Искомое выражение равно

$$\sin^2\beta\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}-\cos^2\beta\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+2\operatorname{ctg}2\beta=\frac{\sin^3\beta}{\cos\beta}-\frac{\cos^3\beta}{\sin\beta}+2\operatorname{ctg}2\beta=\frac{\sin^4\beta-\cos^4\beta}{\cos\beta\sin\beta}+2\operatorname{ctg}2\beta=$$

$$=\frac{(\sin^2\beta-\cos^2\beta)(\sin^2\beta+\cos^2\beta)}{\cos\beta\sin\beta}+2\operatorname{ctg}2\beta=-\frac{\cos 2\beta}{\frac{1}{2}\sin 2\beta}+2\operatorname{ctg}2\beta=-2\frac{\cos 2\beta}{\sin 2\beta}+2\operatorname{ctg}2\beta=0.$$

б) Искомое выражение равно

$$\left(\cos\frac{3\pi}{4}\cdot\cos\alpha+\sin\frac{3\pi}{4}\cdot\sin\alpha\right)^2+\frac{1}{2}\sin 2\alpha=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin\alpha\right)^2+\frac{1}{2}\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)^2+\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha)+\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}.$$

в) Искомое выражение равно

$$\sqrt{2+\sqrt{2(1+\cos 4\alpha)}}=\sqrt{2+\sqrt{2(1+2\cos^2\alpha-1)}}=\sqrt{2+\sqrt{4\cos^2 2\alpha}}=\sqrt{2+2|\cos 2\alpha|}=$$

$$=\sqrt{2(1+|\cos 2\alpha|)}.$$

Чтобы раскрыть модуль, рассмотрим два случая.

1. Если $\cos 2\alpha\geqslant 0$, то получим

$$\sqrt{2(1+\cos 2\alpha)}=\sqrt{2(1+2\cos^2\alpha-1)}=\sqrt{4\cos^2\alpha}=2|\cos\alpha|.$$

2. Если $\cos 2\alpha<0$, то получим

$$\sqrt{2(1-\cos 2\alpha)}=\sqrt{2(1-1+2\sin^2\alpha)}=\sqrt{4\sin^2\alpha}=2|\sin\alpha|.$$

Итак, $\sqrt{2+\sqrt{2(1+\cos 4\alpha)}}=\begin{cases}2|\cos\alpha|, \text{ если } \cos 2\alpha\geqslant 0\\ 2|\sin\alpha|, \text{ если } \cos 2\alpha<0\end{cases}$. $\blacksquare$

Пример 4. Вычислить значение выражения:

а) $\sin 20°\cdot\sin 40°\cdot\sin 80°$;

б) $\cos 20°\cdot\cos 40°\cdot\cos 80°$;

в) $\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{3\pi}{7}$;

г) $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$.

Решение.

а) По формуле преобразования произведения синусов в разность косинусов имеем: $\sin 20°\cdot\sin 40°=\frac{1}{2}(\cos 20°-\cos 60°)=\frac{1}{2}\left(\cos 20°-\frac{1}{2}\right)$. Поэтому искомое выражение равно

$$\frac{1}{2}\left(\cos 20°-\frac{1}{2}\right)\cdot\sin 80°=\frac{1}{2}\left(\cos 20°-\frac{1}{2}\right)\cdot\cos 10°=\frac{1}{2}\left(\cos 20°\cos 10°-\frac{1}{2}\cos 10°\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos 30°+\cos 10°}{2}-\frac{1}{2}\cos 10°\right)=\frac{1}{4}\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

б) Обозначим искомое выражение через x. Тогда

$$x\cdot\sin 20°=\sin 20°\cdot\cos 20°\cdot\cos 40°\cdot\cos 80°=\frac{1}{2}\cdot\sin 40°\cdot\cos 40°\cdot\cos 80°=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\sin 80°\cdot\cos 80°=\frac{1}{8}\cdot\sin 160°=\frac{1}{8}\cdot\sin 20°,\text{ откуда } x=\frac{1}{8}.$$

в) Заметим, что $\cos\frac{3\pi}{7}=-\cos\frac{4\pi}{7}$.

Обозначим искомое выражение через x. Тогда

$$x\cdot\sin\frac{\pi}{7}=-\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}=-\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}=-\frac{1}{8}\cdot\sin\frac{8\pi}{7}=\frac{1}{8}\cdot\sin\frac{\pi}{7},\text{ откуда } x=\frac{1}{8}.$$

г) Обозначим искомое выражение через x. Тогда (см. также пример 4*, п.5.2.4):

$$2\sin\frac{\pi}{7}\cdot x=2\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7}=$$

$$=\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\pi-\sin\frac{5\pi}{7}=-\sin\frac{\pi}{7},\text{ откуда } x=-\frac{1}{2}.\ \blacksquare$$

Пример 5. Доказать, что:

а) $\sin 50°+8\cdot\sin 10°\cdot\sin 50°\cdot\sin 70°=2\cos^2 20°$; б) $\operatorname{tg}30°+\operatorname{tg}40°+\operatorname{tg}50°+\operatorname{tg}60°=\frac{8}{\sqrt{3}}\cos 20°$.

Доказательство:

а) Имеем:

$$\sin 50°+8\cdot\sin 10°\cdot\sin 50°\cdot\sin 70°=\sin 50°\cdot(1+8\cdot\sin 10°\cdot\sin 70°)=$$

$$=\sin 50°\cdot(1+4\cdot(\cos 60°-\cos 80°))=\sin 50°\cdot\left(1+4\cdot\left(\frac{1}{2}-\cos 80°\right)\right)=\sin 50°\cdot(3-4\cos 80°)=$$

$$=3\cdot\sin 50°-4\cdot\sin 50°\cdot\sin 10°=3\cdot\sin 50°-2\cdot(\cos 40°-\cos 60°)=$$

$$=3\cdot\sin 50°-2\cdot\left(\sin 50°-\frac{1}{2}\right)=\sin 50°+1=1+\cos 40°=2\cos^2 20°.$$

б) Можно заметить, что для любых α, β таких, что $\cos\alpha\neq 0$, $\cos\beta\neq 0$, имеет место равенство $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}°\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$. Поэтому

$$\operatorname{tg}30°+\operatorname{tg}60°+\operatorname{tg}40°+\operatorname{tg}50°=\frac{\sin 90°}{\cos 30°\cdot\cos 60°}+\frac{\sin 90°}{\cos 40°\cdot\cos 50°}=$$

$$=\frac{2}{2\cos 30°\cdot\sin 30°}+\frac{2}{2\cos 40°\cdot\sin 40°}=\frac{2}{\sin 60°}+\frac{2}{\sin 80°}=\frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\cos 10°}=2\cdot\frac{2\cos 10°+\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cos 10°}=$$

$$=2\cdot\frac{2\cos 10°+2\cos 30°}{\sqrt{3}\cdot\cos 10°}=\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\cos 10°+\cos 30°}{\cos 10°}=\frac{8}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\cos 20°\cdot\cos 10°}{\cos 10°}=\frac{8}{\sqrt{3}}\cos 20°.\ \blacksquare$$

К **535** Проанализируйте, как было выполнено преобразование:

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=1-\frac{(2\sin\alpha\cos\alpha)^2}{2}=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha.$$

Поясните, какие формулы были использованы в этом преобразовании. Перепишите эту цепочку преобразований, надписав над каждым знаком равенства нужную формулу.

Проверьте себя по учебнику, рассмотрев пример 1.

536 Преобразуйте сумму $\sin x+\cos x$ в произведение, составляя верную цепочку равенств из следующих выражений:

$$\sqrt{2}\left(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right);\qquad \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right);\qquad \sqrt{2}\left(\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Какие тригонометрические формулы вы использовали, значения каких тригонометрических функций вам понадобились? Какие алгебраические преобразования применяли?

Проверьте себя по учебнику, рассмотрев пример 2.

537 Докажите тождества:

а) $\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$; б) $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$.

538 Упростите выражение $\sqrt{3-2\cos2\alpha+2\sqrt{2-2\cos2\alpha}}$.

539 Вычислите произведение: $\operatorname{tg}20°\operatorname{tg}40°\operatorname{tg}80°$.

540 Вычислите произведение: $\sin 20°\sin 40°\sin 60°\sin 80°$.

541 Докажите неравенство: $\sin^8\alpha+\cos^8\alpha\geqslant\frac{1}{8}$.

П **542** Вычислите:

а) $\left(\left(3^{-\frac{1}{4}}\right)^8+\left(\frac{3}{2}\right)^0\right)^{-2}$; б) $\dfrac{\left(12^{\frac{1}{2}}-\sqrt{8}\right)\cdot3^{\frac{1}{2}}}{\left(36^{\frac{1}{2}}-2\sqrt{6}\right)\left(2+\frac{2}{9}\right)}$.

543 Упростите выражения:

а) $\dfrac{\left(10^{\frac{1}{3}}-7^{\frac{1}{3}}\right)\left(\sqrt[3]{100}+\sqrt[3]{70}+\sqrt[3]{49}\right)}{(3\sqrt{16}-3\sqrt{6})^2\left(\frac{\sqrt{16}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}$; б) $\left(\dfrac{a^{1,5}+b^{1,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}-a^{0,5}b^{0,5}\right):(a-b)+\dfrac{2b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}$.

Д **544** Докажите тождества:

а) $\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha=2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$; б) $\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha=2\cos\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)$.

545 Упростите выражение $\sqrt{3+2\cos2\alpha+2\sqrt{2+2\cos2\alpha}}$.

546 Вычислите произведение: $\cos 20°\cos 40°\cos 60°\cos 80°$.

547 Докажите неравенство: $\sin^{16}\alpha+\cos^{16}\alpha\geqslant\frac{1}{128}$.

548 Упростите выражения:

а) $\dfrac{\left(5^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\right)\left(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)}{0{,}25}$;

б) $\left(\dfrac{ab^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{ba^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}\right):\left(\dfrac{-1}{a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}}\right)$;

в) $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{3}{2}}}{a+2a^{\frac{1}{2}}+1}-\sqrt{a}\right):\dfrac{1-a^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}}$.

C **549*** Докажите, что функция $f(x)=\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x}$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, является нечетной.

Экспресс-тест № 10

Примерное время выполнения – 50 минут

Часть А

№ 1

№ 1. Укажите верную формулу:

А) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$;

Б) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$;

В) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$;

Г) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha-\sin\beta$.

№ 2	
1	2

№ 2. Установите соответствие между правой и левой частью формул приведения:

1) $\sin(\pi k\pm\alpha)$; 2) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi k\pm\alpha\right)$.

А) $\pm\cos\alpha$; Б) $\pm\sin\alpha$.

№ 3

№ 3. Какая из формул двойного угла является неверной?

А) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$; В) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$;

Б) $\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$; Г) $\operatorname{ctg}2\alpha=\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$.

Часть В

№ 4

№ 4. Известно, что $\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$, α – угол III четверти. Укажите значение $\sin 2\alpha$.

А) $\dfrac{24}{25}$; Б) $-\dfrac{24}{25}$; В) $\dfrac{12}{25}$; Г) $\dfrac{9}{25}$.

№ 5

№ 5 Упростите выражение $\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$, используя формулы половинного угла, и укажите полученное вами выражение.

А) $\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$; Б) $\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}$; В) $\operatorname{tg}^2 2\alpha$; Г) $\dfrac{1+\cos\frac{\alpha}{2}}{1-\cos\frac{\alpha}{2}}$.

№ 6

№ 6. Вычислите tg 15° и укажите полученное вами значение.

А) $\sqrt{3}-2$; Б) $1-\frac{\sqrt{3}}{3}$; В) $2-\sqrt{3}$; Г) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

№ 7

№ 7. Укажите, в виде какого выражения можно представить разность $1-\sin\alpha$.

А) $2\sin^2\alpha$; Б) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$; В) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$; Г) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

Часть С

(ход решения и ответ записывается на отдельном листе)

№ 8. Найдите значение выражения $\dfrac{\sin\frac{2\pi}{7}}{2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}}+\dfrac{\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

Ответы и решения к тесту:

№ 1	№ 2		№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7
	1	*2*					
А	*Б*	*А*	*Б*	*А*	*Б*	*В*	*Г*

№ 8

$$\frac{\sin\frac{2\pi}{7}}{2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}}+\frac{\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$$

Перепишем числитель первой дроби, используя формулу двойного угла, тогда первая дробь перепишется в виде: $\dfrac{\sin\frac{2\pi}{7}}{2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}}=\dfrac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}{2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}}=\dfrac{\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}}$.

Применяя определения тангенса и котангенса, основное тригонометрическое тождество, а также учитывая, что $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$, получим:

$$\frac{\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}}+\frac{\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\frac{\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}{\frac{\cos\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}}+\frac{\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}{\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{7}}}+1=\sin^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{\pi}{7}+1=2.$$

Шкала успешности:

9–10 баллов – *отлично*
6–8 баллов – *хорошо*
4–5 баллов – *удовлетворительно*

Задачи для самоконтроля к Главе 5

550 Выразите в радианах угол:

а) $30°$; б) $-120°$; в) $-135°$; г) $900°$; д) $468°$.

551 Какой четверти принадлежит угол:

а) $\frac{15\neq}{8}$; б) $\frac{11\neq}{4}$?

552 Определите знак произведения

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}\cdot\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{7\pi}{8}$.

553 Вычислите:

а) $-\sin^2\frac{\pi}{3}$; б) $3\cos 2\pi$; в) $\operatorname{tg}\pi+\cos\frac{\pi}{2}+\sin\pi$.

554 Упростите:

а) $\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$;

б) $\sin^2 2°+\cos^2 2°+\operatorname{ctg}^2 2°$;

в) $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\beta}+\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\beta}$.

555 Упростите:

а) $\sin(2\pi-\alpha)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$;

б) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\beta\right)-\operatorname{ctg}(\pi+\beta)$.

556 Докажите тождество

$\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+\sin(\alpha-\beta)\sin\gamma=\sin\beta\sin(\alpha-\gamma)$.

557 Найдите значения выражений:

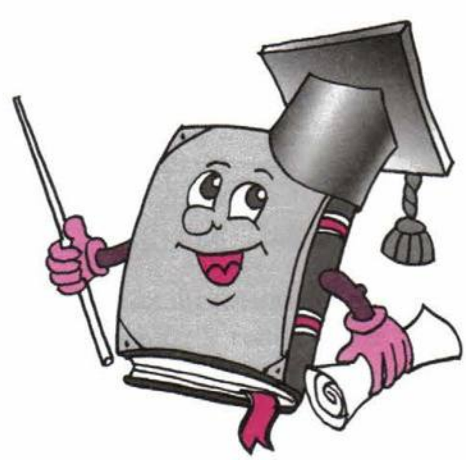
а) $2\sin\frac{\neq}{12}\cos\frac{\neq}{12}$;

б) $\cos^2\frac{3\pi}{8}-\sin^2\frac{3\pi}{8}$;

в) $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$.

558 Найдите значение выражения:

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}-\cos^2\frac{\pi}{8}$.



Задачи для итогового повторения курса

559 Изобразите графики уравнений:

а) $(x+2)^2+(y-2)^2=9$; в) $(y+2x^2)(x-1)=0$; д) $x^2+y^2=x-2y+5$;

б) $(x-4)^2+(y-3)^2=0$; г) $(y+3)(x^2-9)=0$; е) $x^2+y^2=6x+4y+3$.

560 Изобразите на плоскости множества точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам:

а) $(x-y)(2x+y-3)<0$; в) $x^2+y^2<2x+2y+2$; д) $y\geqslant -x+|x|$;

б) $(0{,}5x+y)(x+2)\geqslant 0$; г) $x^2+y^2\leqslant 4x-2y+4$; е) $y<x-|x|$.

561 Найдите площадь фигуры, заданной системой неравенств:

а) $\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 3\\ -2\leqslant y\leqslant 4\end{cases}$; б) $\begin{cases}x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 4\end{cases}$; в) $\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 25\\ y\geqslant |x|\end{cases}$; г) $\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 10\\ y\geqslant x\end{cases}$.

562 Найдите область определения функции:

а) $y=\dfrac{x}{x^2+10x+16}$; в) $y=\dfrac{\sqrt{x+5}}{x^2}$; д) $y=\sqrt{12+x-x^2}-\dfrac{3}{\sqrt{2x-5}}$;

б) $y=\dfrac{5x}{x^2-9x+20}$; г) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x^2}$; е) $y=\sqrt{5-2x}-\dfrac{3}{\sqrt{15-2x-x^2}}$.

563 Постройте график функции и найдите область ее значений:

а) $y=-\dfrac{5(x+1)}{x^2+x}$; в) $y=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+5x}\right)^2}{x}$;

б) $y=\dfrac{x-2}{x^2-4}$; г) $y=\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-x}}\right)^2-1$.

564 Найдите множество значений функции на заданной области определения, не выполняя построения ее графика:

а) $y=x^2-10x+18$ при $x\in(-\infty;+\infty)$; в) $y=-3x^2+6x+1$ при $x\in[-2;0]$;

б) $y=-x^2+4x$ при $x\in(-\infty;+\infty)$; г) $y=2x^2-4x-1$ при $x\in[-1;+\infty)$.

565 Определите, на каких промежутках из области определения следующие функции неположительны:

а) $y=7x-4-3x^2$; в) $y=-\sqrt{7x-x^2}$; д) $y=\dfrac{(x+1)^3x^2}{1-x}$; ж) $y=x^2+4|x|-5$;

б) $y=3x^2-5x+2$; г) $y=\sqrt{x^2-3x+2}$; е) $y=-\dfrac{2x-1}{x(x-3)^4}$; з) $y=x^2-7|x|+6$.

566 Определите, на каких промежутках из области определения следующие функции возрастают и убывают:

а) $y=4-x-3x^2$; в) $y=-\sqrt{(x-3)^2}$; д) $y=4x-|x|-5|x-2|$;

б) $y=-5-x+4x^2$; г) $y=\sqrt{(x+2)^2}$; е) $y=|x|+4|x+2|-6x$.

567 Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $y=5-4\sqrt{x}$; б) $y=-6+\sqrt{x}$; в) $y=-\dfrac{15}{x^2+3}$; г) $y=\dfrac{24}{x^2+6}$.

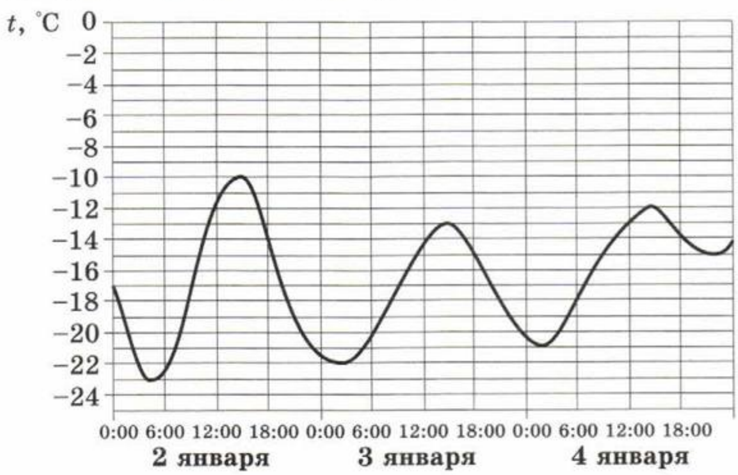
568 Исследуйте на четность-нечетность следующие функции:

а) $y=x^3\cdot\sqrt{x}$; б) $y=3\cos x+2|x|$; в) $y=\dfrac{\sin x}{x^4-8}$.

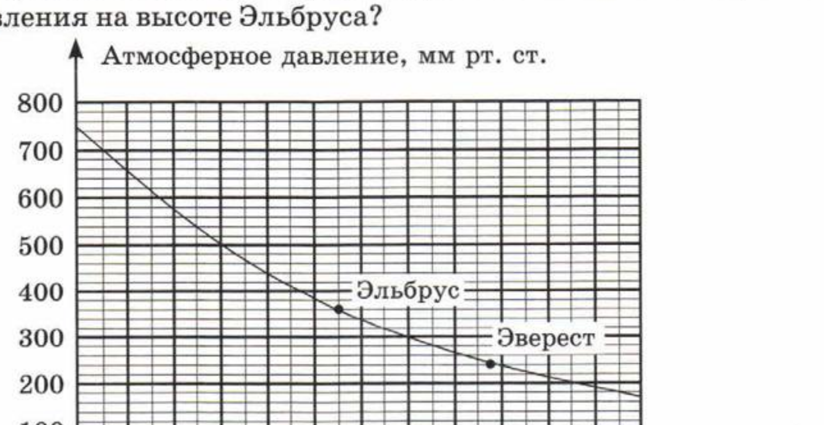
569 Какие из следующих функций являются ограниченными?

а) $y=-x^2-|x|$; б) $y=\sqrt{1-x^2}+x^2$; в) $y=\dfrac{x}{x^2+x+1}$.

570 На рисунке показано, как изменялась температура воздуха на протяжении трех зимних дней. По горизонтали указаны дни, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значением температуры в каждый из трех дней.



571 На графике изображена зависимость атмосферного давления (в миллиметрах ртутного столба) от высоты местности над уровнем моря (в километрах). На сколько миллиметров ртутного столба атмосферное давление на высоте Эвереста ниже атмосферного давления на высоте Эльбруса?



572 Постройте графики функций:

а) $y=\dfrac{x}{x-1}$; б) $y=\dfrac{x}{x+1}$; в) $y=\dfrac{x+3}{x^2-9}$; г) $y=\dfrac{x-2}{x^2-4}$.

573 Постройте графики функций, представив их в виде $y=(x-d)^3+h$:

а) $y=x^3+6x^2+12x+5$; б) $y=x^3-12x^2+48x-60$.

574 Постройте графики функций:

а) $y=-x^2-5$; в) $y=(x+3)^2-4$; д) $y=-\dfrac{3}{x+1}$; ж) $y=\dfrac{1}{x+5}-1$;

б) $y=-(x+2)^2$; г) $y=(x-1)^2+5$; е) $y=\dfrac{1}{x}+2$; з) $y=\dfrac{1}{x-2}+3$.

575 Постройте графики функций:

а) $y=\dfrac{1}{|x|+1}$; б) $y=\dfrac{1}{|x|-1}$.

576 Постойте график функции $y=f(x)$, где

а) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{x}, \text{ если } x\geqslant 1\\ 3x+2, \text{если } -1<x<1\\ \sqrt{-x-1}-1, \text{ если } x\leqslant -1\end{cases}$; б) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1}+2, \text{ если } 1\leqslant x\leqslant 5\\ 3x-1, \text{ если } -1<x<1\\ \dfrac{4}{x}, \text{ если } -4\leqslant x\leqslant -1\end{cases}$.

и, используя его, определите множество значений функции, а так же решите уравнение $f(x)=a$ при $a=1$ и $a=-1$.

577 Постройте графики функций $y=f(-x)$, $y=-f(x)$, $y=-f(-x)$, если:

а) $f(x)=x+1$; в) $f(x)=|x-2|-2$; д) $f(x)=-x^2+4x$; ж) $y=\dfrac{2}{x-2}$;

б) $f(x)=-x+2$; г) $f(x)=|x+1|+3$; е) $f(x)=x^2+6x-7$; з) $y=-\dfrac{1}{x+1}$.

578 Постройте графики функций:

а) $y=\dfrac{2x}{x+1}$; б) $y=\dfrac{3x+4}{x+2}$.

579 Постройте графики функций:

а) $y=\sqrt[4]{x-1}$; в) $y=1-\sqrt[4]{x}$; д) $y=\sqrt[3]{x+2}$; ж) $y=\sqrt{|x|+1}+1$;

б) $y=\sqrt[4]{x+2}$; г) $y=\sqrt[4]{x}+2$; е) $y=\sqrt[3]{x-3}$; з) $y=2-\sqrt[5]{x-2}$.

580 Постройте графики функций:

а) $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x}+3, \text{ если } x\geqslant 1\\ -\dfrac{4}{x}, \text{ если } x\leqslant -1\end{cases}$; б) $f(x)=\begin{cases}x^3, \text{ если } 0\leqslant x\leqslant 2\\ \sqrt{|x|}, \text{ если } -9\leqslant x<0\end{cases}$.

С помощью графика определите:

1) промежутки монотонности;

2) наибольшее и наименьшее значения функции;

3) множество значений функции;

4) является ли функция ограниченной.

581 Постройте графики функций:

а) $y=(x+1)^{0,7}$; б) $y=x^2\sqrt{-x}$; в) $y=x^{-\frac{3}{5}}+1$; г) $y=(x-2)^{-\frac{7}{2}}$.

582 Определите множество значений функций:

а) $y=|x-5|$; в) $y=|x^3|+1$; д) $y=-\left|\dfrac{2}{x}\right|$; ж) $y=\sqrt{|x|}$;

б) $y=|6-x|$; г) $y=|-x^2|-1$; е) $y=-\left|\dfrac{8}{x}\right|$; з) $y=5-\sqrt{x^2}$.

583 Напишите первые пять членов последовательности:

а) $a_n=\dfrac{1}{2n-1}$; б) $a_n=\dfrac{3n-2}{4}$.

584 Исследуйте на монотонность последовательность, то есть выясните строго (нестрого) возрастающей она является или строго (нестрого) убывающей:

а) $x_n=\dfrac{2n^2+4n-1}{(n+1)^2}$; б) $x_n=\sqrt{n}-\sqrt{n+1}$; в) $x_n=\dfrac{3^n}{n!}$.

585 Исследуйте последовательности на ограниченность:

а) $x_n=\dfrac{n}{n^2+2}$; б) $x_n=\dfrac{n!}{100^n}$; в) $x_n=\sqrt{n^2+2}-n$.

586 а) В арифметической прогрессии первый член равен -7, а разность равна $0{,}5$. Является ли число -2 членом этой прогрессии?

б) В арифметической прогрессии первый член $20{,}5$, а разность равна -2. Является ли число $-8{,}5$ членом этой прогрессии?

587 а) Между числами 6 и $-1{,}2$ вставьте семь чисел так, чтобы получились последовательные члены некоторой арифметической прогрессии.

б) Между числами $-8{,}2$ и 2 вставьте пять чисел так, чтобы получились последовательные члены некоторой арифметической прогрессии.

588 а) Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 11 и не превосходящих 500.

б) Найдите сумму всех натуральных чисел от 120 до 320, оканчивающихся цифрой 3.

589 а) Места для зрителей стадиона разбиваются по секторам. В первом ряду углового сектора 9 мест, в каждом следующем ряду на 2 места больше, чем в предыдущем. Сколько всего мест в угловом секторе стадиона, если в нем 26 рядов?

б) На первую клетку шахматной доски (размером 8×8) положили 2 зерна, на вторую – на 3 зерна больше и т.д. Таким образом, выкладывая на каждую следующую клетку на 3 зерна больше, чем на предыдущую, была заполнена вся доска. Сколько всего зерен оказалось на шахматной доске?

590 а) Является ли число 486 членом геометрической прогрессии (b_n), если $b_n=2\cdot 3^{n-1}$?

б) Является ли число 162 членом геометрической прогрессии (b_n), если $b_n=0{,}5\cdot 9^{n-1}$?

591 а) Геометрические прогрессии заданы формулой общего члена: $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$; $c_n = 2 \cdot 9^n$; $d_n = 3^{n-1}$. Выберите из них ту, среди членов которой нет числа 18.

б) Геометрические прогрессии заданы формулой общего члена: $b_n = 5 \cdot 2^{n-1}$; $c_n = 4 \cdot 2^{n-1}$; $d_n = 3 \cdot 7^{n-1}$. Выберите из них ту, среди членов которой есть число 640.

592 а) Найдите шестой член геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = -0{,}32$ и $q = 0{,}5$.

б) Найдите пятый член геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = 0{,}16$ и $q = -0{,}5$.

593 Дана геометрическая прогрессия, у которой:

а) $b_7 : b_4 = 27$ и $b_3 + b_5 = 180$; б) $b_{11} : b_8 = 8$ и $b_4 + b_6 = 120$.

Найдите первый член этой прогрессии.

594 а) Какой может быть сумма первых девяти членов геометрической прогрессии (b_n), если $b_2 = 0{,}04$ и $b_5 = 0{,}32$?

б) Какой может быть сумма первых восьми членов геометрической прогрессии (b_n), если $b_2 = 1{,}2$ и $b_4 = 4{,}8$?

595 а) Все члены геометрической прогрессии (b_n) – положительные числа. Известно, что $b_3 - b_2 = 18$ и $b_5 - b_2 = 234$. Сумма скольких первых членов этой прогрессии равна 120?

б) Все члены геометрической прогрессии (b_n) – отрицательные числа. Известно, что $b_3 - b_2 = -0{,}6$ и $b_5 - b_2 = -4{,}2$. Сумма скольких первых членов этой прогрессии равна $-76{,}5$?

596 Представьте в виде несократимой дроби бесконечные периодические десятичные дроби, используя формулу суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

а) 0,(5); б) 1,(18).

597 Какой может быть сумма бесконечной геометрической прогрессии, если ее первый член равен 9, а третий равен 1?

598 Найдите формулы общего члена последовательностей, заданных рекуррентно:

а) $x_{n+1} = 3x_n + 4$, $x_1 = 1$; б) $x_{n+1} = -2x_n + 3$, $x_1 = 4$.

599 Решите уравнения:

а) $x^3 - 16x = 0$; в) $7x(x^2 + 4) = 4x^2 + 16$; д) $2y^3 - 8y^2 + 3y - 12 = 0$;

б) $9x^3 - x = 0$; г) $12x^2 + 8 - 15x^3 = 10x$; е) $5(y^3 - 5y^2 + 4) = 4y$.

600 Решите уравнения:

а) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$; в) $(3x^2 + 4)^2 - 17(3x^2 + 4) + 70 = 0$;

б) $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$; г) $4(x^2 + x + 1)^2 + x^2 + x - 4 = 0$.

601 При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - 2ax + 1 = 0$:

а) имеет хотя бы один корень;

б) имеет ровно один корень;

в) не имеет корней;

г) имеет два корня одного знака;

д) имеет два корня разных знаков?

602 1) При каких значениях параметра c уравнение $x^4 - 6x^2 + c = 0$ имеет четыре различных корня?

2) При каких значениях параметра c уравнение $x^4 - 8x^2 + c = 0$ имеет два различных корня?

603 Решите уравнения:

а) $x^3 + 3x^2 - 3x - 14 = 0$;
в) $x^4 - 7x^3 - 6x^2 - 7x + 1 = 0$;
б) $x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 13x + 6 = 0$;
г) $x^4 - 8x^3 + 14x^2 - 8x + 1 = 0$.

604 Составьте приведенное квадратное уравнение с целыми коэффициентами, зная, что среди его корней есть число:

а) $5-\sqrt{2}$;
б) $\sqrt{7}+3$.

605 Решите уравнения:

а) $\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{5}{x^2+x-6}=\dfrac{3}{x^2-2x}$;
б) $\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^2-27\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)^2=6$.

606 Решите уравнение $(x + 5)((x + 4)^4 - (x + 4)^3 + (x + 4)^2 - (x + 4) + 1) = 33$.

607 Решите уравнения:

а) $x - 8 + 7x^{-1} = 0$;
в) $x^2 + 25x^{-2} + 10 = 0$;
д) $(x-3)^{-1}+\dfrac{18}{x^2-9}=\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{-1}$;
б) $x + 8x^{-1} = 6$;
г) $x^2 + 3x^{-2} - 4 = 0$;
е) $\left(\dfrac{x+6}{2}\right)^{-4}+\left(3+\dfrac{x}{2}\right)^{-2}=2$.

608 Решите уравнения:

а) $\sqrt{x+1+\sqrt{2}}=\sqrt[4]{2}$;
в) $(x^2-4x)\sqrt{x-2}=0$;
д) $\sqrt{1+5x}=1-x$;
б) $\sqrt{3x+4\sqrt{5}}=\sqrt{5}+2$;
г) $(x^2+3x)\sqrt{x+2}=0$;
е) $\sqrt{12-x}=x$.

609 Решите уравнения:

а) $\sqrt{4x^2-12x+9}=2$;
б) $\sqrt[3]{6x-x^2}=-3$;
в) $\sqrt{3x^2-5x}=\sqrt{1-7x}$.

610 Решите уравнения:

а) $1-x=x+\sqrt{5x^2-5x+1}$;
б) $\sqrt{x^2+x+1}-x=2x-1$.

611 Решите уравнения:

а) $(2x+7)^{\frac{1}{2}}=1$;
в) $(x-4)^{\frac{1}{3}}=-3$;
б) $(x^2-2x)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}-3^{\frac{1}{2}}$;
г) $(x^2+6x)^{\frac{3}{4}}=8$.

612 Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases}9x-2y=43\\7x+2y=37\end{cases}$;
в) $\begin{cases}21x-15y=75\\17x+4y=93\end{cases}$;
б) $\begin{cases}6x+5y=10\\11x-5y=75\end{cases}$;
г) $\begin{cases}15x+6y=63\\9x+8y=40\end{cases}$.

613 Выясните, сколько решений имеют данные системы в зависимости от значения параметра a и решите их.

а) $\begin{cases}2x-y=5\\4x+ay=3\end{cases}$;
б) $\begin{cases}x+ay=-1\\x-y=a\end{cases}$.

Задачи для итогового повторения курса

614 Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ xy=6 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x=3-y \\ x^2+xy=6y \end{cases}$; д) $\begin{cases} x^2-y=-2 \\ x^2y=24 \end{cases}$; ж) $\begin{cases} x^2-y^2=32 \\ x^2+y^2=40 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} (x-y)(x+y)=15 \\ xy=4 \end{cases}$; г) $\begin{cases} x-y=4 \\ y^2-xy=2x \end{cases}$; е) $\begin{cases} x-xy=10 \\ x^2y=24 \end{cases}$; з) $\begin{cases} x^2-xy=12 \\ x^2+xy=6 \end{cases}$.

615 Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{11}{x}+\dfrac{8}{y}=1 \\ \dfrac{9}{x}+\dfrac{12}{y}=1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dfrac{3}{2x-y}+\dfrac{2}{2x+y}=1\dfrac{2}{5} \\ \dfrac{2}{2x-y}+\dfrac{3}{2x+y}=1\dfrac{4}{15} \end{cases}$; в) $\begin{cases} \left(\dfrac{x-1}{y+2}\right)^2+\dfrac{3x-3}{y+2}=4 \\ x+y=9 \end{cases}$.

616 Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} 3x+3y+xy=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x^2+3xy+y^2=11 \\ x^2y+xy^2=6 \end{cases}$.

617 а) Произведение двух чисел равно 598, а их сумма составляет 49. Найдите эти числа.

б) Площадь прямоугольника составляет 832 см^2, а его периметр 116 см. Найдите длины сторон этого прямоугольника.

в) От дома до магазина запчастей Олег добирался на мопеде, затратив на весь путь 30 минут. На обратный путь он затратил на 10 минут больше, так как ехал со скоростью на 15 км/ч меньшей, чем первоначальная. Каково расстояние от дома Олега до этого магазина?

г) Катер проплыл от одной пристани до другой против течения реки за 36 минут. На обратный путь он затратил на 6 минут меньше. Найдите расстояние между пристанями и собственную скорость катера, если скорость течения реки составляет 2 км/ч.

618 а) В бассейн проведены две трубы с холодной и горячей водой. Если открыть обе трубы, то он наполнится через 18 минут. Если открыть только трубу с холодной водой, то бассейн наполнится на 15 минут быстрее, чем только через трубу с горячей водой. За сколько минут можно наполнить бассейн холодной водой?

б) Два поезда отправляются одновременно из городов A и B навстречу друг другу. Скорость первого поезда на 10 км/ч больше скорости второго. Оба поезда встречаются на станции C, которая находится на расстоянии 28 км от середины расстояния между A и B. Если бы первый поезд отправился из A на 45 минут позже второго, то они встретились бы на середине пути между городами. Найдите расстояние между городами A и B и скорость каждого поезда.

в) Два туриста вышли из пункта A в пункт B одновременно. Первый турист проходит каждый километр на 5 минут быстрее второго. Первый турист, пройдя пятую часть пути, вернулся в A и, пробыв там 10 минут, снова отправился в B. Найдите расстояние между A и B, если известно, что второй турист прошел его за 2,5 часа и оба туриста пришли в B одновременно.

г*) Из двух городов, расстояние между которыми 2400 км, выехали навстречу друг другу одновременно пассажирский и товарный поезда. Каждый из них шел с постоянной скоростью, и в некоторый момент времени они встретились. Если бы оба поезда шли со скоростью пассажирского поезда, то их встреча произошла бы на 3 часа раньше. Если бы оба поезда шли со скоростью товарного поезда, то их встреча произошла бы на 5 часов позже. Найдите скорость пассажирского и товарного поездов.

619 Решите неравенства:

а) $2x^2 > 4x$; г) $-5x^2 - 9x + 2 < 0$;

б) $\frac{x^2}{\sqrt{3}} \leqslant \sqrt{27}$; д) $(x-2)(x-3)^2 > 0$;

в) $2x^2 - 9x - 5 < 0$; е) $(x-6)(x+1)^2 \geqslant 0$.

620 При каких значениях параметра a неравенство $ax^2 - 4x + 4 < 0$ не имеет решений?

621 Решите неравенства:

а) $x^2(x^2+4) \leqslant 9(x^2+4)$; д) $(2x-3)(x^2-x-2) \leqslant (2x-3)(10x^2+11x+2)$;

б) $x^2(x^2+1) \geqslant 16(x^2+1)$; е) $(3x-1)(x^2+x-2) \leqslant (3x-1)(9x^2+7x-1)$;

в) $(x^2-6x+5)(x+3)^2 \leqslant 0$; ж) $36x^4 + 35x^2 - 1 \leqslant 0$;

г) $(x^2-5x+4)(x+2)^2 \geqslant 0$; з) $49x^4 + 48x^2 - 1 \geqslant 0$.

622 Решите неравенства:

а) $\frac{2}{3x+6} \geqslant 0$; д) $\frac{2x-1}{3x+6} > 0$; и) $\frac{2}{x^2-2x-24} < 0$; ;

б) $\frac{4}{2x+8} \leqslant 0$; е) $\frac{6x-3}{x+2} < 0$; к) $\frac{6}{x^2+2x-24} \geqslant 0$;

в) $\frac{2x-1}{3x^2+6} > 0$; ж) $\frac{2}{4x^2-9} \geqslant 0$; л) $\frac{x^2-20}{x^2+4} - \frac{x-8}{x^2+4} < 0$;

г) $\frac{6x-3}{x^2+2} < 0$; з) $\frac{4}{9-9x^2} \leqslant 0$; м) $\frac{21-x^2}{2x^2+11} \leqslant \frac{x-9}{2x^2+11}$.

623 Решите неравенства:

а) $\frac{x-4}{x^2-3x-10} \geqslant 0$; б) $\frac{1}{x-7} > \frac{1}{x+8}$; в) $\frac{x^2-5x+4}{x-4} \geqslant 0$.

624 Докажите неравенство $x^4 + y^4 + 8 \geqslant 8xy$.

625 Найдите наибольшее значение выражения $\frac{x}{x^2-5x+25}$ при $x > 0$.

626 Решите неравенства:

а) $\sqrt{x^2+x-2} < \sqrt{10}$; б) $\sqrt[3]{10+x-x^2} \geqslant 2$; в) $(7-x^2)\sqrt{x+2} \leqslant 0$.

627 Решите неравенства:

а) $\sqrt{3x^2+1} > \sqrt{3x+1}$; б) $\sqrt{7-3x} < 3x-1$; в) $\sqrt{x^2-5} \geqslant 2x-4$.

628 Упростите:

а) $\left(\sqrt[3]{q^2}\right)^5$; в) $\sqrt[30]{2^9}$; д) $\sqrt[5]{m} \cdot \sqrt[5]{m^2}$; ж) $\sqrt[3]{t} \cdot \sqrt[6]{t}$; и) $\sqrt[8]{k^3} \cdot \sqrt[12]{k^7}$;

б) $\left(\sqrt[5]{p^4}\right)^4$; г) $\sqrt[36]{5^{24}}$; е) $\sqrt[3]{v^4} : \sqrt[3]{v^2}$; з) $\sqrt[4]{s^3} \cdot \sqrt[20]{s}$; к) $\sqrt[16]{z^7} \cdot \sqrt[24]{z^{13}}$.

629 Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$; б) $\sqrt[4]{7\frac{58}{81}}$; в) $\sqrt{80a^5}$; г) $\sqrt{27b^7}$.

630 Сравните числа:

а) $2\sqrt{45}$ и $\sqrt{125}$; в) $\sqrt{\sqrt{5}}$ и $\sqrt[8]{24}$; д) $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt[4]{10}$; ж) $-\sqrt[6]{6000}$ и $-\sqrt{20}$;

б) $\frac{1}{4}\sqrt{112}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{32}$; г) $\sqrt{\sqrt[3]{3}}$ и $\sqrt[3]{2}$; е) $\sqrt[5]{5}$ и $\sqrt[3]{3}$; з) $-\sqrt[3]{20}$ и $-\sqrt{8}$.

631 Расположите числа в порядке возрастания:

а) 5; $\sqrt{21}$; $3\sqrt{6}$; $2\sqrt{16}$; $\sqrt[3]{50}$; б) 6; $\sqrt{26}$; $3\sqrt{3}$; $2\sqrt[3]{29}$; $\sqrt[3]{100}$.

632 Вычислите значения выражений:

а) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{2}-\sqrt[5]{243}$; б) $\dfrac{\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[4]{9}}{\sqrt[12]{9}}+\sqrt[7]{128}$.

633 Найдите значения выражений:

а) $\sqrt{27+10\sqrt{2}}-\sqrt[3]{125}$; б) $\sqrt{17-12\sqrt{2}}+\sqrt[4]{64}$.

634 Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{28a^2b}$, если $a<0$, $b>0$;

б) $\sqrt{125a^4b^2}$, если $a<0$, $b<0$;

в) $\sqrt[4]{-32x^5y^7}$, если $x<0$, $y>0$.

635 Внесите множитель под знак корня:

а) $a\sqrt[4]{3}$, если $a\geqslant 0$; в) $-b\sqrt{5}$, если $b\geqslant 0$; д) $x\sqrt[6]{\frac{3}{x}}$; ж) $-\frac{2}{y}\sqrt[3]{\frac{y}{4}}$;

б) $-a\sqrt[4]{3}$, если $a\geqslant 0$; г) $-b\sqrt{5}$, если $b<0$; е) $x\sqrt[6]{\frac{-3}{x}}$; з) $y^2\sqrt[5]{\frac{-1}{y^8}}$.

636 Представьте выражение в виде корня некоторой степени:

а) $\dfrac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}$; в) $\dfrac{\sqrt[3]{2a}\cdot\sqrt[5]{3a^2}}{\sqrt[10]{12a^7}}$;

б) $\dfrac{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[8]{72}}{\sqrt{24}}$; г) $\dfrac{\sqrt[7]{4x^3y^5}\cdot\sqrt[14]{\frac{x}{8y^2}}}{\sqrt{xy}}$.

637 Избавьтесь от иррациональности в знаменателях дробей:

а) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{5}}$; в) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{ab^2}}$; д) $\dfrac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$; ж) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}}$; и) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}}$;

б) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$; г) $\dfrac{2}{\sqrt[4]{p^3q}}$; е) $\dfrac{3}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$; з) $\dfrac{7}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}}$; к) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{4}}$.

638 Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

639 Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{1}{\sqrt[6]{6}+\sqrt[3]{6}+\sqrt{6}}$.

640 Докажите иррациональность чисел: а) $\sqrt[9]{8}$; б*) $\sqrt[3]{2}-\sqrt{5}$.

641 Вычислите:

а) $\dfrac{81^{\frac{1}{4}}-0{,}5^0-1{,}5^3\cdot1{,}5^{-2}+2^2:2^{-3}}{3{,}25}$;   б) $\dfrac{32^{\frac{1}{5}}-2{,}15^0+5^4\cdot5^{-2}-3^{-2}:3^{-3}}{2{,}3}$.

642 Сократите дроби:

а) $\dfrac{3^{-2n}\cdot5^n}{5^{n-2}\cdot9^{-n-2}}$;   б) $\dfrac{45^{n+3}}{3^{2n+5}\cdot5^{n+2}}$.

643 Упростите:

а) $\dfrac{a^{-2}-2a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}{a^{-2}-b^{-2}}$;   б) $\dfrac{a^{-2}+a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}{a^{-3}-b^{-3}}$;

644 Упростите выражение: $\dfrac{x\sqrt{x}-x}{x+x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{5}{6}}}+\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-x}{x^{0,5}+x^{\frac{1}{3}}}$.

645 Учитель физкультуры оценил примерное количество учеников, присутствующих на уроке, в 20 человек. После того как им была проведена перекличка, оказалось, что присутствуют 22 человека. Определите абсолютную и относительную погрешность приближения.

646 Петя хочет посчитать площадь крышки от консервной банки. Он знает, что площадь круга $S = \pi R^2$, а длина окружности $L = 2\pi R$. При помощи нитки он нашел длину окружности с абсолютной погрешностью не более 2 см. Она оказалась равной 24 см. После этого он нашел площадь по формуле $S=\pi\left(\dfrac{L}{2\pi}\right)^2=\dfrac{L^2}{4\pi}$, считая, $\pi \approx 3$. Какая у него получилась площадь? Оцените абсолютную погрешность ответа.

647 Найдите корень уравнения $2x^3 + x = 7$ с точностью 0,1 (абсолютной погрешностью не более, чем 0,1) и докажите, что этот корень единственен на $(-\infty; +\infty)$.

648 1) Сколькими способами можно с помощью букв A, B, C, D обозначить вершины четырехугольника?

2) Сколько различных фраз можно составить, изменяя порядок слов в предложениях: а) «Мы идем домой»; б) «Я купил себе брюки».

649 а) Сколькими различными способами можно поставить в ряд 2 зеленых, 4 красных, 3 синих кубика (кубики отличаются только цветом)?

б) Сколько различных «слов» можно написать, переставляя буквы в слове ЗАДАНИЕ (словом считать даже бессмысленный набор букв)?

650 Сколькими способами организаторы конкурса могут определить, кто из 10 участников конкурса будет выступать первым и вторым?

651 Сколько четырехзначных чисел, в которых нет одинаковых цифр, можно составить из цифр:

а) 2, 4, 6, 7, 9;   б) 3, 5, 6, 7, 8, 9?

652 а) Из 9 человек, работающих в отделе, необходимо троих направить в командировку. Сколькими способами это можно сделать?

б) На полке стоят 10 книг на английском языке и 3 англо-русских словаря. Сколькими способами читатель может выбрать 3 книги и 2 словаря?

653 Три ученика независимо друг от друга написали по одной цифре от 0 до 9. Какова вероятность того, что среди написанных цифр:

а) не будет ни одной цифры 0;

б) будет хотя бы одна цифра 6;

в) не будет ни одной четной цифры;

г) будет хотя бы одна нечетная цифра?

654 а) Фабрика выпускает перчатки. В среднем на 70 качественных пар перчаток приходится одна пара со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная пара окажется качественной.

б) Статистика показывает, что из 1000 посаженных семян помидоров всходят только 900. Найдите вероятность того, что семя помидора не прорастет.

655 В прямоугольнике 5 см × 3 см расположен круг радиусом 1 см. Какова вероятность того, что точка, случайным образом поставленная в прямоугольник, окажется внутри круга?

656 Владелец одного частного предприятия уволил большую часть сотрудников, а оставшимся снизил зарплату на 20% (см. таблицу). После этого он заявил, что за последнее время средний заработок рабочих на его предприятии повысился.

	До увольнения		После увольнения	
Заработная плата за день (руб.)	1000	400	800	320
Число рабочих (чел.)	200	800	200	120

Пользуясь таблицей, вычислите среднюю заработную плату до и после увольнения и выясните, могла ли средняя заработная плата повыситься?

657 Каждому учащемуся 9 А класса был задан вопрос: «Сколько времени ты провел в пятницу за компьютером?» Данные опроса представлены в таблице.

Количество человек	Время, проведенное за компьютером (в мин.)
2	30
2	40
4	50
2	60
1	70
5	90
1	110
1	120
1	150
2	160

1) Найдите:

а) среднее время, которое ученик этого класса провел за компьютером в пятницу;

б) моду набора значений времени;

в) медиану набора значений времени.

2) Вычислите размах и дисперсию указанных в таблице значений времени.

658 Докажите, что счетным является множество членов арифметической прогрессии с первым членом 5 и разностью 7.

659 На плоскости нарисованы непересекающиеся круги. Может ли множество этих кругов быть несчетным, если

а) радиусы всех кругов одинаковые;

б*) радиусы могут быть различными?

660 Докажите тождество: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

661 Докажите, что для всех натуральных n выполняется неравенство:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n}.$$

662 Докажите, что при любом натуральном n число $n^3 + 5n$ делится нацело на 6.

663 Докажите, что число, составленное из 3^n одинаковых цифр, делится на 3^n.

664 Сколько рациональных слагаемых содержится в разложении $\left(\sqrt{5}-\sqrt[3]{2}\right)^{60}$ по формуле бинома Ньютона?

665 Докажите тождества:

а) $\sin^2\alpha + \cos^4\alpha = \sin^4\alpha + \cos^2\alpha$; б) $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2 = 4$.

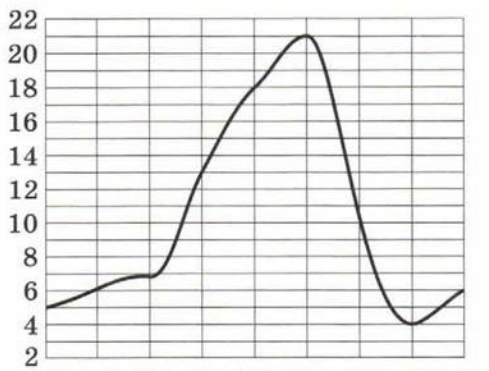
Итоговая проверочная работа

Примерное время выполнения – 3 часа

Часть А

№ 1

№ 1. На рисунке показано, как изменялась температура воздуха на протяжении одних суток. По горизонтали указано время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значением температуры за время измерения.



А) 17; Б) 16;

В) 21; Г) 4.

№ 2

№ 2. Стоимость проезда в пригородном электропоезде составляет 212 рублей. Школьникам предоставляется скидка 50 %. Сколько рублей стоит проезд группы из 3 взрослых и 14 школьников?

А) 3604 руб.; Б) 2120 руб.; В) 1802 руб.

№ 3

№ 3. Билет на автобус стоит 25 рублей. Какое максимальное число билетов можно будет купить на 200 рублей после повышения цены билета на 20% ?

А) 7; Б) 5; В) 6; Г) 8.

№ 4

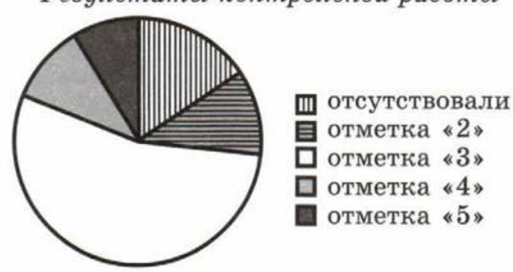
№ 4. На числовой оси отмечено число a. Какое из утверждений относительно этого числа является верным?

А) $a - 3 > 0$; Б) $6 - a > 0$; В) $a - 7 > 0$; Г) $4 - a > 0$.

№ 5

№ 5. Завуч школы подвел итоги контрольной работы по математике в 9-х классах. Результаты представлены на круговой диаграмме. Сколько примерно учащихся получили «положительную» отметку («3», «4» или «5»), если всего в школе 87 девятиклассников?

Результаты контрольной работы



А) более 75 учащихся;

Б) около 70 учащихся;

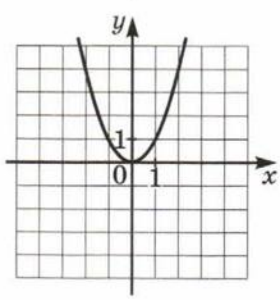
В) около 65 учащихся;

Г) менее 50 учащихся.

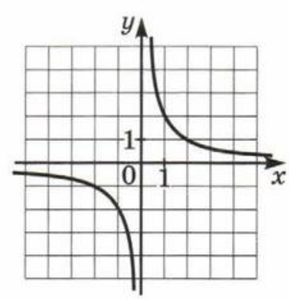
№ 6		

№ 6. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

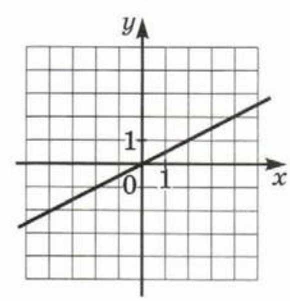
а)



б)



в)



1) $y = x^2$; 2) $y = \dfrac{x}{2}$; 3) $y = \sqrt{x}$; 4) $y = \dfrac{2}{x}$.

Часть В

№ 7

№ 7. Расположите числа в порядке возрастания:

$4;\ \sqrt{23};\ 3\sqrt{7};\ 2\sqrt{9};\ \sqrt[3]{50}$.

№ 8

№ 8. Решите уравнение $\dfrac{x-6}{7x+3} = \dfrac{x-6}{5x-1}$.

№ 9

№ 9. Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{2}{4x-58}} = \dfrac{1}{9}$.

№ 10

№ 10. Упростив выражение $\dfrac{ab}{a+b} \cdot \left(\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}\right)$, найдите его значение при $a = \sqrt{5} + 2$, $b = \sqrt{5} - 3$.

№ 11

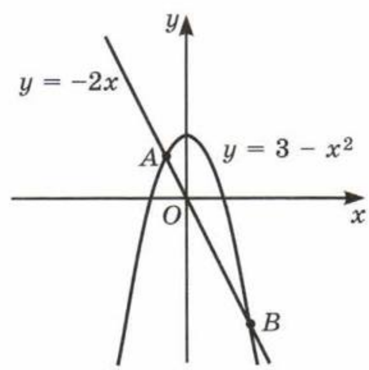
№ 11. Найдите значение выражения $61a - 11b + 50$, если $\dfrac{2a - 7b + 5}{7a - 2b + 5} = 9$.

№ 12

№ 12. Строительная фирма планирует купить 50 м^3 пеноблоков у одного из трех поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице.

Поставщик	Стоимость пеноблоков (руб. за кубометр)	Стоимость доставки (руб.)
«Дешевле всех»	2000	27 500
«У нас дешевле!»	2300	15 000
«Бесплатная доставка»	2500	0

Сколько рублей нужно заплатить за самую дешевую покупку с доставкой?



№ 13

№ 13. На рисунке изображены графики функций $y = 3 - x^2$ и $y = -2x$.

Вычислите координаты точки B.

№ 14

№ 14. Найдите наибольшее значение функции

$f(x) = \sqrt{32 + 14x - x^2}$.

№ 15

№ 15. Из формулы площади треугольника $S = \dfrac{abc}{4R}$ выразите длину стороны b.

№ 16

№ 16. Решите неравенство $x^2 - 100 \leqslant 0$.

№ 17

№ 17. Сократите дробь $\dfrac{18^{n+3}}{3^{2n+5} \cdot 2^{n-2}}$.

№ 18

№ 18. При каком значении x справедливо равенство $3^{x-2} = 27$?

№ 19

№ 19. Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = -5t^2 + 18t$ (h – высота в метрах, t – время в секундах, прошедшее с момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте не менее 9 метров.

№ 20

№ 20. В таблице представлены результаты четырех стрелков, показанные ими на тренировке. Тренер решил взять с собой на соревнование того, у кого относительная частота попаданий выше. Кого из стрелков возьмет тренер?

Фамилия спортсмена	Количество выстрелов	Количество попаданий
Воробьев	20	16
Орлов	24	20
Соколов	30	27
Соловьев	50	40

№ 21

№ 21. Монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно два раза.

№ 22

№ 22. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за три дня?

№ 23

№ 23. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 80 км, выехал автобус. В середине пути он был задержан на 10 минут, но, увеличив скорость на 20 км/ч, прибыл в пункт B вовремя. С какой скоростью автобус проехал первую половину пути?

Часть С

(ход решения и ответ записывается на отдельном листе)

№ 24. Расстояние между пристанями A и B равно 120 км. Из A в B по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправился катер, который, прибыв в пункт B, сразу повернул обратно и возвратился в A. К этому времени плот прошел 24 км. Найдите скорость катера в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

№ 25. Один сосуд содержит 30, а другой – 20 килограммов раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 68% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 70% кислоты. Какая концентрация кислоты в этих сосудах?

№ 26. Постройте график функции $y=\dfrac{x^4-13x^2+36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях параметра c прямая $y=c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Шкала успешности:

Каждое верно выполненное задание части А оценивается в 1 балл, части В – в 2 балла, части С – в 3 балла. *33–49* баллов – *отлично* *25–32* балла – *хорошо* *17–24* балла – *удовлетворительно*

8. 8; 6; 4; 3; 10; 0,2; $\frac{5}{4}$. **9.** 3; −7; 6; −2; 3; −0,7; $\frac{5}{6}$. **10.** $\sqrt{|a|}$; a^3; $|a|^5$; a^6; a; $\sqrt{a}$. **11.** $\sqrt[35]{a}$; $\sqrt[12]{a}$; $\sqrt[6]{a}$. **12.** $\sqrt[4]{|a|^3}$; $\sqrt{|a|^5}$; $\sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt[3]{a^{20}}$. **14.** а) 4; б) 2; в) 4; г) −4. **15.** 6. **20.** 5, 2; 0,4; 4; 20; 0,5; $\frac{9}{7}$. **21.** 81; −5; 9; −3; 4; − 1,1; $\frac{4}{7}$. **22.** $\sqrt{|a|^3}$; $\sqrt[5]{a^8}$; $\sqrt[4]{|a|^3}$; $\sqrt[5]{a^{11}}$. **24.** а) 10; б) 3; в) 5; г) −4. **27.** Не существует. **33.** а) $2\sqrt[4]{125}$; б) $2\sqrt[5]{3}$; в) $-5\sqrt[3]{2}$; г) $\frac{5}{3}\sqrt[3]{\frac{5}{9}}=\frac{5}{9}\sqrt[3]{15}$; д) $2\sqrt[6]{\frac{2}{125}}=\frac{2}{5}\sqrt[6]{250}$. **34.** а) $4ab\sqrt[3]{2a^2b}$; б) $-2xy^3\sqrt[5]{16x}$; в) $\frac{2a}{b^5}\sqrt[7]{32a^3}$; г) $3a^2\sqrt[4]{a}$; д) $a^2|b|\sqrt[4]{49ab}$. **35.** а) $\sqrt[4]{162}$; б) $-\sqrt[3]{686}=\sqrt[3]{-686}$; в) $-\sqrt[4]{768}$; г) $\sqrt[5]{\frac{729}{2}}$. **36.** а) $\sqrt[3]{64a^{10}b^4}$; б) $-\sqrt[7]{1287x^{22}y^{34}}=\sqrt[7]{-1287x^{22}y^{34}}$; в) $-\sqrt[3]{x^7y^2z}=\sqrt[3]{-x^7y^2z}$; г) $\sqrt[4]{x^{11}}$; д) $-\sqrt[6]{-y^{19}}$; и) $-\sqrt[6]{a^{17}b^4}$, если $b>0$; $\sqrt[6]{a^{17}b^4}$, если $b<0$. **37.** а) $\sqrt[30]{4}$; б) $-\sqrt[20]{\frac{1875}{256}}$; в) $\sqrt[24]{32}$. **38.** а) $\frac{6\sqrt[3]{3}}{3}=2\sqrt[3]{3}$; б) $\frac{5\sqrt[4]{8}}{2}$; в) $-\frac{3\sqrt[3]{49}}{7}$; г) $\frac{ab\sqrt[6]{c^5}}{c}$. **39.** а) $\sqrt[4]{24}<\sqrt{5}$; б) $\sqrt{5}>\sqrt[3]{9}$; в) $-\sqrt[4]{4}<-\sqrt[8]{4\sqrt{2}}$. **40.** $\sqrt[6]{|a^5|}$; $\sqrt{a^3}$; $\sqrt[6]{a^7}$; a^2. **42.** 0. **43.** а) $5\sqrt[4]{2}$; б) $4\sqrt[5]{5}$; в) $-7\sqrt[3]{35}$; г) $\frac{5}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{9}}$; д) $\frac{3}{2}\sqrt[6]{\frac{5}{56}}$. **44.** а) $\sqrt[4]{243}$; б) $-\sqrt[3]{500}=\sqrt[3]{-500}$; в) $-\sqrt[4]{32}$; г) $\sqrt[5]{1458}$; **45.** а) $\sqrt[3]{54a^{14}b^4}$; б) $-\sqrt[7]{384x^{16}y^{54}}=\sqrt[7]{-384x^{16}y^{54}}$; в) $-\sqrt[3]{\frac{y^3z^8}{x^2}}=\sqrt[3]{-\frac{y^3z^8}{x^2}}$; г) $-\sqrt[4]{-x^{17}}$; д) $\sqrt[6]{-y^{23}}$; е) $\sqrt[6]{\frac{a^9}{b^2}}$, если $b>0$; $-\sqrt[6]{\frac{a^9}{b^2}}$, если $b<0$. **46.** а) $3a^2\sqrt[3]{6ab^2}$; б) $-2x^2y\sqrt[5]{40a^3y^2}$; в) $\frac{3a}{b^{10}}\sqrt[7]{5a}$; г) $-3a^3\sqrt[4]{-4a^3}$; д) $a^2|b|\sqrt[4]{125a^3b}$. **47.** а) $\sqrt[20]{128}$; б) $-\sqrt[20]{\frac{2187}{16}}$; в) $\sqrt[24]{512}$. **48.** а) $\frac{30\sqrt[3]{9}}{9}=\frac{10\sqrt[3]{9}}{3}$; б) $\frac{20\sqrt[4]{2}}{4}=5\sqrt[4]{2}$; в) $-\frac{35\sqrt[3]{7}}{7}=-5\sqrt[3]{7}$; г) $\frac{b\sqrt[6]{a^5}}{a^2}$. **49.** а) $\sqrt[5]{10}>\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3\frac{1}{2}}>\sqrt[3]{5\frac{1}{2}}$; в) $-\sqrt[4]{7}>-\sqrt{2\sqrt{3}}$. **57.** а) $4\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}+2$; б) $\frac{2\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{2}-1}{3}$; в) $-\frac{(17+8\sqrt{3})(\sqrt[4]{3}+2)}{13}$; г) $\sqrt[6]{32}+\sqrt[6]{16}+\sqrt[6]{8}+\sqrt[6]{4}+\sqrt[6]{2}+1=\sqrt[6]{32}+\sqrt[3]{4}+\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{2}+1$. **58.** $\frac{1+\sqrt[3]{a}}{1+a}$ при $a\neq-1$; $\frac{1}{3}$ при $a=-1$. **59.** $\frac{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5}}{2}$. **60.** а) 1; б) $\frac{2}{\sqrt[8]{a}-1}$; в) $a-b$. **61.** 2. **62.** 6. **64.** а) $\sqrt[3]{9}$; б) $\sqrt[15]{0{,}25}$. **65.** а) $\frac{3\sqrt[4]{8}}{2}$; б) $\frac{11\sqrt[3]{25}}{5}$; в) $-\frac{\sqrt[3]{9}}{3}$; г) $\sqrt[3]{n}$. **66.** а) $[3;+\infty)$; б) $(-\infty;-1)$; в) $(-2;3]$. **67.** а) $D(y)=\left(-\infty;\frac{1}{3}\right]$; $E(y)=[3;+\infty)$; б) $D(y)=(-\infty;+\infty)$; $E(y)=[0;+\infty)$. **68.** а) $\frac{9\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{9}+3}{2}$; б) $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$; в) $\sqrt[4]{5}+2$; г) $\frac{\sqrt[6]{1024}+\sqrt[6]{256}+\sqrt[6]{64}+\sqrt[6]{16}+\sqrt[6]{4}+1}{3}=\frac{2\sqrt[6]{32}+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+3}{3}$. **69.** $\frac{\sqrt{6+3\sqrt{3}}-\sqrt{6}}{3}$ или $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}$. **70.** $\frac{2-\sqrt[4]{8}}{2}$. **71.** 4. **72.** а) $2\sqrt[6]{2}$; б) $\sqrt[15]{2^7}$. **73.** а) $D(y)=[-0{,}5;+\infty)$; $E(y)=(-\infty;2]$; б) $D(y)=(-\infty;0{,}5]$, $E(y)=[0;+\infty)$; в) $D(y)=[-0{,}5;1{,}5)\cup(1{,}5;+\infty)$, $E(y)=(-\infty;0)\cup[0{,}5;+\infty)$. **74.** 9. **81.** $\{1\}$. **84.** а) $\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}$; б) $\frac{1}{a-\sqrt{ab}+b}$; в) $\sqrt[4]{a}+\sqrt[3]{b}$; г) $\sqrt[4]{b}-a\sqrt{a}$. **85.** 0. **86.** а) возрастает при $x\in(-\infty;1]$; убывает при $x\in[1;+\infty)$; б) возрастает при $x\in[1;+\infty)$; убывает при $x\in(-\infty;1]$. **89.** $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}$. **93.** а) иррациональным; б) в зависимости от числа может получиться как рациональное, так и иррациональное число; в) иррациональным; г) в зависимости от чисел; д) в зависимости от чисел; е) в зависимости от чисел. **95.** а) $\frac{1}{3}$; б) $-\frac{1}{2}$, 2. **98.** а) четная; б) четная; в) нечетная. **101.** а) $-\frac{1}{4}$; б) $\pm\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, 2. **103.** а) нечетная; б) четная; в) четная. **104.** Верно. **108.** а) 0,5; 1; б) $\varnothing$; в) $\pm\sqrt{3}$. **109.** а) 3; б) −2; −1. **110.** а) 1; б) −2; 7. **111.** 2. **112.** Один, $a_1=6$. **113.** $a_n=\frac{4n-1}{3n+2}=1\frac{1}{3}-\frac{11}{9n+6}<1\frac{1}{3}$. Последовательность возрастающая, так как при увеличении n дробь $\frac{11}{9n+6}$ уменьшается и разность $1\frac{1}{3}-\frac{11}{9n+6}$ увеличивается. **115.** 1. **116.** а) $\varnothing$; б) $3\pm\sqrt{14}$; в) −5; 3. **117.** а) 5; б) −3; 2. **118.** а) 3; б) −4; 1. **119.** 2. **120.** Два, $a_1=-14$. **121.** $a_n=\frac{3n+1}{4n-3}=\frac{3}{4}+\frac{13}{16n-12}>\frac{3}{4}$.

Последовательность убывающая, так как при увеличении n дробь $\frac{13}{16n-12}$ уменьшается и сумма $\frac{3}{4}+\frac{13}{16n-12}$ уменьшается. **123.** -2; -1; 1,5. **124.** $x \geqslant 2$. **127.** а) $\left[\frac{3}{7}; +\infty\right)$; б) $\varnothing$; в) $[-0{,}5; 1{,}5)$; г) $(-\infty; -7]$; д) $\left(\frac{29}{3}; +\infty\right)$. **128.** а) $\left(-\frac{1}{2}; 3\right)$; б) $[-\sqrt{13}; -2] \cup [2; \sqrt{13}]$; в) $(-\infty; 1-\sqrt{8}) \cup (1+\sqrt{8}; +\infty)$. **129.** а) $\{-1\} \cup [3; +\infty)$; б) $\{1\} \cup [5; +\infty)$; в) $[-6; -3) \cup (2; +\infty)$. **130.** а) $(4; +\infty)$; б) $(-\infty; -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}; 3]$. **132.** а) -2; $\frac{1}{2}$; $-\frac{8}{27}$; $\frac{1}{4}$; $-\frac{32}{125}$; б) -1; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{6}$; $\frac{1}{24}$; $-\frac{1}{120}$. **133.** Последовательность убывающая, так как при увеличении натурального n знаменатель дроби n^2+1 увеличивается, а сама дробь $\frac{2}{n^2+1}$ уменьшается. **134.** а) 1; 2,5; б) -12; в) -13; -2; г) 2; 8. **135.** а) 6; б) 2; в) -1; 1,5. **136.** а) $\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$; б) $\left[-\frac{1}{3}; 1\right)$; в) $(-\infty; 13]$; г) $\left(\frac{6}{7}; +\infty\right)$; д) $[-2; +\infty)$. **137.** а) $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$; б) $[-2; -1) \cup (0; 1]$; в) $[2; 3]$. **138.** а) $[-3; -\sqrt{5}) \cup [\sqrt{5}; +\infty)$; б) $(-\infty; 2] \cup \{3\}$; в) $(-2; -1] \cup [1; 3)$. **139.** а) $(-\infty; 1]$; б) $[-\sqrt{5}; 1) \cup (2; \sqrt{5})$. **140.** 1; -1; 1; -1; 1; -1. **141.** Последовательность возрастающая, так как $a_{n+1} - a_n = 2n > 0$. **142.** а) $\frac{2}{3}$; 1; б) -3; в) -7; -4; г) $1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. **143.** а) 2; 3; б) 3; в) 3; 11. **144.** -1. **151.** а) -512; б) $\frac{1}{3}$; в) $-\frac{25}{4}$; г) $\frac{5}{11}$. **152.** а) $2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$; б) a^3b^3. **153.** 163%. **154.** $a_{23} = 171$ и $d = 8$. **155.** а) $\varnothing$; б) $[4{,}5; +\infty)$; в) $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$; г) $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$; д) $[-4; 1)$; е) $[-26; +\infty)$. **156.** а) $(-\infty; -0{,}8) \cup (1; +\infty)$; б) $(-4-2\sqrt{5}; 0] \cup [8; 4+2\sqrt{5})$; в) $[3; 6]$. **157.** а) -5; б) $\frac{25}{9}$; в) 7. **158.** а) a^2b^2; б) $-\frac{1}{a+b}$. **159.** 52%. **160.** $a_{34} = -51$ и $d = -4$. **161.** а) 0,8; б) $\varnothing$; в) $(-\infty; -19)$; г) $\left[-1\frac{2}{7}; +\infty\right)$; д) $[-31; 5]$; е) $[-244; +\infty)$. **162.** а) $(-\infty; -1] \cup [2{,}5; +\infty)$; б) $(-3; -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}; 3)$; в) $(-\infty; -10) \cup (3; +\infty)$. **170.** а) 1; б) 100; в) 4. **171.** а) x^3-1; б) $\frac{1}{a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{5}}}$; в) t^3. **172.** а) $a_n = -90 + 44{,}2\,(n-1)$ или $a_n = 3 + 5n$; б) $a_n = 2n - 18$ или $a_n = -2n + 18$. **173.** 61376. **174.** а) $x^2 - xy + y^2$; б) $x+1$; в) $\frac{x^3 - x^2 + 2}{x^2 - 2x + 2}$. **175.** $2\frac{3}{29}$. **176.** $-\frac{ab}{(n+b)^2}$. **177.** а) 0,5; б) 0,2; в) 2. **178.** а) $1 - x^3$; б) $x^{\frac{3}{4}} + y^{\frac{7}{8}}$; в) $\sqrt{t}$. **179.** а) $a_n = 3n - 1$; б) $a_n = 3n - 16$ или $a_n = -3n + 16$. **180.** 165150. **181.** -3. **182.** $1 + 2m$ (представьте числитель первой дроби в виде разности квадратов). **183.** Не может. **187.** 0. **188.** $x_7 = 10$. **189.** $x_{161} = 0{,}4$. **190.** а) -2; б) 24,25. **191.** а) $x^{-2}y$; б) $m-1$. **193.** 0. **194.** $x_5 = 21$. **195.** $x_{126} = -0{,}1$. **196.** а) 3,1; б) 6,16. **197.** а) $2c^{-2}$; б) $t-1$. **203.** а) $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{15}$; б) $\frac{1}{3}$; $-\frac{3}{2}$; в) 0; 2. **204.** а) $\pm\sqrt{\frac{13}{2}}$; б) ± 5; в) $\varnothing$. **205.** 164. **206.** $11 - 6\sqrt{5}$. **207.** При $m = -1$ или $m = -2$. **209.** а) ± 2; б) $\frac{5}{23}$; $-\frac{1}{5}$; в) ± 1. **210.** а) $-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$; б) $\pm\frac{1}{2}$; в) $\varnothing$. **211.** -176. **212.** При $n = -2$ или $n = 8$. **214.** 1234. **220.** а) 8; б) -5; в) $\pm 2\sqrt{2}$; г) $\varnothing$. **221.** а) $\left\{\pm 1; \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$; б) $\varnothing$; в) $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$; г) $\varnothing$; д) $\left\{0; \pm\frac{2\sqrt{6}}{3}\right\}$; е) 0, 1, 2, 3 или 4 корня. **222.** а) $\{1; 3; 2 \pm \sqrt{3}\}$; б) $\{-2; 4\}$. **223.** 1. **224.** а) $\{\pm 1; 5\}$; б) $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$. **225.** $y_6 = -32$, $S_6 = 133$. **226.** $q = 2$, $b_1 = 6$, $b_n = 6 \cdot 2^{n-1}$, $S_n = 6 \cdot (2^n - 1)$ или $q = 4$, $b_1 = 1$, $b_n = 4^{n-1}$, $S_n = \frac{4^n - 1}{3}$. **227.** 0,5; 2. **228.** а) $\frac{1}{64}$; 1; б) 1; 8. **229.** а) 30; б) -3; в) $\pm 3\sqrt{3}$; г) $\varnothing$. **230.** а) $\varnothing$; б) $\left\{\pm 3; \pm\frac{1}{2}\right\}$; в) $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$; г) ± 1; д) 0; е) $\varnothing$. **231.** а) $\{1; 5; 3 \pm \sqrt{5}\}$; б) $\{-3; -1\}$. **232.** $\{-0{,}5; -2\}$. **233.** а) 7; б) $\left\{-1; \frac{3}{2}\right\}$.

234. $q=\frac{1}{3}$, $S_4=133\frac{1}{3}$. **235.** а) $q=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=0,5$, $b_1=3$, $b_n=6\cdot 2^{-n}$, $S_n=6\cdot(1-(0,5)^n)$; **236.** -1. **237.** а) 1; 64; б) $4^{-3,75}$. **238.** $51^{101}>101!$. **242.** а) $(-\infty;-\sqrt{5}]\cup[-2;2]\cup[\sqrt{5};+\infty]$; б) $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$; в) $(-\infty;+\infty)$. **243.** а) $\{-1\}\cup$ $\cup[2;+\infty)$; б) $(-\infty;2]\cup(3;4)$; в) $(-2;-1)\cup(1;2)\cup(2;+\infty)$. **244.** При $a\leqslant 1$ $x\in(-\infty;1]$, при $a>1$ $x\in(-\infty;1]\cup$ $\cup\{a\}$. **245.** $n=8$, $y_8=-768$. **246.** При $y=1$. **247.** а) $-7,5$; б) $-\frac{1}{3}$; в) $\varnothing$; г) -3; $-\frac{1}{3}$. **248.** 1; 13. **249.** $\frac{2}{3}$, 1,5. **250.** а) -3; -2; 5; б) -1; 2. **251.** а) $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$; б) $[-3;-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2};3]$; в) $\varnothing$. **252.** а) $(-\infty;-3)\cup(-1;1)$; б) $(-3;-1)\cup(-1;2)\cup(2;+\infty)$; в) $\{-1\}\cup(1;+\infty)$. **253.** При $a<-1$ $x\in[a;-1]\cup[1;+\infty)$, при $a=-1$ $x\in\{-1\}\cup[1;+\infty)$, при $-1<a<1$ $x\in[-1;a]\cup[1;+\infty)$, при $a=1$ $x\in[-1;+\infty)$, при $a>1$ $x\in[-1;1]\cup$ $\cup[a;+\infty)$. **254.** $n=5$, $y_5=48$. **255.** при $k=1$. **256.** а) $-\frac{2}{7}$; б) $\pm\frac{1}{6}$; в) $-\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}$. **257.** 1. **258.** а) -2; б) 1. **261.** а) $(x^2+5x+20)(x-5)+102$; б) $(x^2+2x-1)(x-2)$; в) $x(x^2+1)-6x+2$; г) $(x-2)(x^2+2x+2)-3x+6$; д) $1\cdot(x^3-3x^2+2x-1)+3x^2-7x+3$. **262.** а) 158; б) 7; в) 0; г) 10; д) 3; е) -148. **263.** -6. **264.** 36. **265.** 48. **266.** при $m=4$. **267.** а) $(-\infty;-3]\cup[-\sqrt{5};\sqrt{5}]\cup[3;+\infty)$; б) $(-2;2)$; в) $(-\infty;+\infty)$. **268.** а) $(-\infty;1]$; б) $(1;+\infty)$; в) $[-2;-1)\cup[2;5)$; г) $\left[-1;\frac{1}{3}\right)\cup[2;3)\cup[7;+\infty)$. **269.** а) $x^2(x-1)+2$; б) $(x^2-2x+2)(x+1)$; в) $(x-1)(x^2-1)+x+1$; г) $x(x^2-x+2)-2x+2$; д) $1\cdot(x^3-2x^2+2x-1)+x^2-2x+3$. **270.** а) 113; б) -2; в) 3; г) 13; д) 18; е) -97. **271.** -7. **272.** 31,5. **273.** -1; 0,5. **274.** 5. **275.** а) $[-3;-2]\cup[2;3]$; б) $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$; в) $\varnothing$. **276.** а) $(-\infty;-5]\cup\{1\}\cup\{3\}$; б) $[-5;-2]$. **277.** $4-x$. **280.** а) $\{-5;-3;1\}$; б) $\{\pm3;4\}$; в) $\{-3;-1\}$; г) $\{1;\pm4\}$; д) $\{-4;-2;1\}$; е) $\{1;4\}$; ж) $\{1;\pm3\}$; з) $\{-1;2;3\}$; и) $\{1;5\}$. **281.** а) $8x^3-6x^2+3x-5=(8x^2+2x+5)(x-1)$; б) $-2x^5+x+1=(-2x^4-2x^3-2x^2-2x-1)(x-1)$; **282.** а) -12; б) 4. **285.** а) $(-1;3)$; б) $\left(a;\frac{2a-1}{3}\right)$, $a\in\boldsymbol{R}$; в) $\varnothing$. **286.** а) $\{-3;-2;-1\}$; б) $\{1;3;4\}$; в) $\{1;2;3\}$; г) $\{1;4\}$; д) $\{-2;\pm5\}$; е) $\{-5;1;3\}$; ж) $\{-3;1;2\}$; з) $\{-3;\pm2\}$; и) $\{\pm4;-2\}$. **287.** $x^3+5x^2+15x+11=(x^2+4x+11)(x+1)$. **288.** а) 0; б) 15. **291.** а) $(-2;-1)$; б) $(8-4,5y;y)$, $y\in\boldsymbol{R}$; в) $\varnothing$. **292.** Верно. **297.** а) 2; б) 2; в) 1; -3. **298.** Встречается; например, C^1_{123456}. **299.** 26. **300.** Левая часть равна $(1-3)^{100}=2^{100}$, а правая равна $(1-5)^{50}=4^{50}=2^{100}$. **301.** $x=2$, $y=3$, $n=5$. **304.** а) $(-1;2;3)$; б) $(-0,5;0,5;1)$. **305.** а) -2; 1; 4; б) -2; -1; 1; 3; в) 1; $1\pm\sqrt{3}$. **306.** 0; -6. **307.** Встречается; например, C^1_{19900} или $C^2_{200}=\frac{199\cdot200}{2}$. **309.** а) $(-2;0;1)$; б) $(0,4;0,6;2)$. **310.** а) -3; б) -3; -1; 1; 4; в) 1; $\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$. **311.** Там, где в треугольнике Паскаля стоит число C_n^k, в треугольнике Лейбница находится $\frac{1}{(n+1)C_n^k}$. **314.** а) $(2;1)$ и $(-2;5)$; б) $(3;2)$; в) $(0;\sqrt[5]{4})$ и $(6;-2)$; г) $(\pm1;3)$ и $(\pm3;-5)$; д) $(1;0)$ и $(2;1)$ **315.** а) $(2;2)$; б) $(3;4)$, $(1;2)$; в) $(6;12)$. **316.** а) $(2;1)$, $(-2;-1)$, $(-2\sqrt{3};\sqrt{3})$, $(2\sqrt{3};-\sqrt{3})$; б) $(3;1)$, $(-1;-3)$; в) $(0;1)$, $(0;-1)$, $\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$. **317.** В первом 20 рядов, а во втором 18 рядов. **318.** 8 м/с и 9 м/с. **319.** а) -1; б) 1. **320.** $\sqrt[7]{64}+\sqrt[7]{32}+\sqrt[7]{16}+\sqrt[7]{8}+\sqrt[7]{4}+\sqrt[7]{2}+1$. **323.** а) $-0,2$; б) $\{-1;2;5\}$. **324.** а) $(5;2)$, $(-5;-3)$; б) $(10;3)$; в) $(5;-2)$, $\left(\frac{1}{4};\frac{\sqrt[3]{20}}{4}\right)$; г) $(1;-4)$, $(-1;-4)$, $(2;-1)$, $(-2;-1)$. **325.** а) $(1;4)$, $(4;1)$; б) $(1;5)$, $(-3;1)$; в) $(1;2)$. **326.** а) $\left(\frac{1}{3};1\right)$, $\left(\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{9};\frac{1}{3}\right)$; б) $(5;2)$, $(-1;-10)$; в) $(2;0)$, $(-2;0)$, $(1;-1)$, $\left(-\frac{4}{7};\frac{15}{7}\right)$. **327.** 4 см и 9 см. **328.** 24 км. **329.** а) -2; б) -5. **331.** а) 2; б) $\{-1;3;7\}$. **332.** $(2;0,5;4)$, $(-2;-0,5;-4)$. **335.** а) $(3;2)$, $(-3;-2)$; б) $(-1;-2)$, $(1;2)$. **336.** $(-4;3)$, $(4;-3)$, $(-3;4)$, $(3;-4)$. **338.** а) $(2;1)$; б) $(1;1)$, $(-3;1)$. **339.** $(-1;-2)$, $(2;1)$. **340.** а) $(-3;2)$; б) $(-3;1)$, $(1;-3)$. **341.** 6 и 2. **342.** а) $\{-5;-6\}$; б) $\{1;-4,6\}$; в) $\{275;10\}$. **343.** а) $x_1=8$; $x_2=3$ или $x_1=3$; $x_2=8$;

б) $x_1 = -1 - \sqrt{7}$; $x_2 = -1 + \sqrt{7}$ или $x_1 = -1 + \sqrt{7}$; $x_2 = -1 - \sqrt{7}$. **344.** а) $(-2; -1)$, $(2; 1)$; б) $(-2; 1)$, $(2; -1)$, $\left(-\frac{13}{\sqrt{138}}; -\frac{5}{\sqrt{138}}\right)$, $\left(\frac{13}{\sqrt{138}}; \frac{5}{\sqrt{138}}\right)$; в) $(1; 2)$; $(1; -3)$; $(2; 2)$; $(2; -3)$. **345.** а) $(1; -1)$; б) $(-2; -1)$, $(2; 1)$. **346.** $(2; -1)$. **347.** а) $(2; -1)$; б) $(-1; -2)$; $(2; 1)$. **348.** а) $x_1 = 3$; $x_2 = -4$ или $x_1 = -4$; $x_2 = 3$; б) $x_1 = 2 - \sqrt{11}$; $x_2 = 2 + \sqrt{11}$ или $x_1 = 2 + \sqrt{11}$; $x_2 = 2 - \sqrt{11}$. **349.** $(1; 1; 0)$. **353.** а) $(1; 3)$, $(3; 1)$, $(-1; -3)$, $(-3; -1)$; б) $(-1; 2)$, $(2; -1)$; $(-2; 1)$, $(1; -2)$, $\left(\sqrt{\frac{7}{3}}; -\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{7}{3}}; \sqrt{\frac{7}{3}}\right)$. **354.** $\left(-\frac{8\sqrt{26}}{13}; \frac{7\sqrt{26}}{13}\right)$, $\left(\frac{8\sqrt{26}}{13}; -\frac{7\sqrt{26}}{13}\right)$, $(-1; -2)$, $(1; 2)$. **355.** а) 40000; б) 120000; в) 987700; г) 130. **356.** а) 42; б) 1,201; в) 98,70; г) 1,3. **357.** а) $(1; -3)$, $(-3; 1)$; б) $(1; -3)$, $(-3; 1)$, $(-1; 3)$, $(3; -1)$; в) $(3; 2)$, $(2; 3)$. **358.** $(1; -2)$; $(-1; 2)$. **359.** а) 123 000; б) 123 500; в) 123,46; г) 123,5. **360.** $(3; 4)$, $(4; 3)$, $(-3; -4)$, $(-4; -3)$. **364.** а) 5°; б) 105 человек; в) 3 см. **365.** а) $5 \cdot 10^{19}$; б) 50 человек. **366. 1)** а) 1,4%; б) 2%; в) 2%; 2) а) 0,008%; б) 33%. **367.** $(0; 2)$; $(2; 0)$. **368.** а) $(-1; 3)$; б) $(-16; -10)$. **369.** 17. **370.** $5 \cdot 10^{-\infty}$ г. **371.** 8,5%; 0,5%. **372.** 222,38 р; 9%. **373.** $(1; 2)$; $(2; 1)$. **374.** а) $(2; 4)$; б) $(0,3; 4,4)$, $(-1,3; -0,4)$. **375.** 10. **377.** 157 ± 11 м². **378.** $b_2 = -6$ или $b_2 = 6$. **379.** 121%. **381.** 39 ± 7 л. **383.** $b_2 = -1$ или $b_2 = 1$. **384.** 4%. **386.** $x \approx 4{,}2$. **387.** $x \approx 1{,}3$. **388.** $b_1 = 6$. **389.** $\frac{S_{14}}{S_7} = 3$. **390.** $q = \sqrt{2}$, $y_5 = 4\sqrt{2} - 12$. **391.** $x \approx -1{,}7$. **392.** $x \approx -0{,}2$. **393.** $y_1 = -18$. **394.** $\frac{S_9}{S_{18}} = \frac{1}{4}$. **395.** $x = 1$, $y = 1$. **396.** а) 2 и 3; б) 3 и 4; в) 4 и 5. **397.** $\{8\}$. **398.** а) $-6{,}75$; б) 116,75. **399.** а) $a^{\frac{1}{3}} + 1$; б) $1 - x^{0,5}$. **400.** а) $\{\pm 2; \pm 1\}$; б) $\{\pm 1\}$; в) $\{2; 2 \pm \sqrt{3}\}$; г) $\{2 \pm \sqrt{3}; -3 \pm \sqrt{2}\}$; д) $\{1; -0{,}5\}$; е) $\{-1\}$; ж) $\{12\}$; з) $\{0\}$; и) $\varnothing$; к) $\{0; 3\}$. **401.** а) $(-8; 2) \cup (3; +\infty)$; б) $(-4; 2)$; в) $(1; +\infty)$; г) $[-1; 0] \cup \{1\}$; д) $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$; е) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; 1\right] \cup [4; +\infty)$. **402.** а) $(-1; -6)$, $(6; 1)$; б) $(1; 0)$; в) $(-3; -4)$, $(4; 3)$; г) $(-1; 1)$. **403.** а) $(1; 2)$, $(-1; -2)$, $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$; б) $(4; 1)$, $(1; 4)$. **404.** а) в первом зале по 20 мест, во втором по 30 мест; б) 7 и 5 см; в) 80 км/ч; г) 53 см, 5%. **406.** а) нет; б) 350, 750, 1150, 1550, 1950, 2350 или 2750; в) 200, 600, 1000, 1400, 1800, 2200, 2600 или 3000. **411.** а) $\frac{\pi}{12}$; б) $-\frac{2\pi}{5}$; в) $\frac{5\pi}{6}$; г) 20π; д) $-\frac{41\pi}{60}$. **412.** а) 75°; б) −80°; в) 84°; г) 234°; д) −68°. **413.** а) I; б) II; в) III; г) IV; д) IV. **414.** а) IV; б) II; в) II; г) I; д) I. **415.** а) I; б) III; в) III; г) IV; д) IV. **416.** а) I; б) IV; в) III; г) IV; д) II. **417.** $\{-710°; 10°; 1810°; \frac{\pi}{18}$ рад; $\frac{37\pi}{18}$ рад$\}$; $\{-170°; -\frac{89\pi}{18}$ рад; $-\frac{17\pi}{18}$ рад$\}$; $\{-800°; -80°; 1000°; -\frac{40\pi}{9}$ рад; $-\frac{4\pi}{9}$ рад; $\frac{140\pi}{9}$ рад$\}$; $\{100°; \frac{5\pi}{9}$ рад$\}$. **418.** а) 3°; 5%; б) 0,0005 радиан; 30%. **419.** а) 0,3; б) −5; в) $\frac{2}{9}$; г) $\frac{4}{9}$; д) 216 000; е) 0,27. **420.** а) $\sqrt[6]{9} > \sqrt{2}$; б) $\sqrt{2} < \sqrt[5]{10}$; в) $\sqrt[6]{24} < \sqrt[3]{5}$; г) $\sqrt[5]{\sqrt{100}} > \sqrt{\sqrt[5]{90}}$. **421.** а) 3; б) 2; в) 6. **422.** а) $(-\infty; -3]$; б) $[-2; 9]$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $(-\infty; 0{,}2] \cup [1; +\infty)$; д) $(-\infty; 2) \cup \{7\} \cup (8; +\infty)$. **423.** а) $\frac{5\pi}{36}$; б) $-0{,}7\pi$; в) $\frac{3\pi}{4}$; г) $4{,}5\pi$; д) $-2{,}6\pi$. **424.** а) −27°; б) 252°; в) −165°; г) 486°; д) −3,5°. **425.** а) I; б) II; в) III; г) IV. **426.** а) I; б) IV; в) II; г) IV; д) I. **427.** а) 0,3; 5%; б) 0,03; 2%. **428.** а) 0,2; б) 8; в) $\frac{1}{14}$; г) −30; д) 21 296; е) $1\frac{47}{49}$. **429.** а) $(-\infty; +\infty)$; б) $[3; 7]$; в) $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$; г) $(-\infty; +\infty)$; д) $(-\infty; +\infty)$; е) −4. **431.** 1) $\sin\angle A = \frac{4}{5}$, $\cos\angle A = \frac{3}{5}$, $\mathrm{tg}\angle A = \frac{4}{3}$, $\mathrm{ctg}\angle A = \frac{3}{4}$. 2) Нет. **433.** а) 0; б) 0. **436.** а) плюс; б) плюс; в) минус; г) минус; д) плюс; е) плюс. **437.** а) минус; б) плюс; в) плюс; г) минус. **438.** $\sin 21 > 0$, $\cos 21 < 0$, $\mathrm{tg}\, 21 < 0$, $\mathrm{ctg}\, 21 < 0$. **439.** а) $5\sqrt[4]{4}$; б) $\frac{ab^3\sqrt[6]{ab}}{2}$; в) $7m^2n^2\sqrt[5]{7m^2n^3}$; г) $-|p|q\sqrt[8]{-p^2q}$. **440.** а) $\sqrt[3]{128a}$; б) $\sqrt[5]{-2m^{16}k^{11}}$; в) $\sqrt[5]{b^6n}$; г) $\sqrt[4]{q^5}$; д) $-\sqrt[8]{-t^9}$; е) $-\sqrt[6]{d^{13}s^9}$. **441.** а) $\sqrt[6]{5}$; б) $\sqrt[12]{243}$; в) $\sqrt[24]{\frac{a}{b^{11}c^3}}$. **442.** а) 1; б) 2. **443.** а) минус; б) минус; в) плюс; г) минус; д) минус; е) минус. **444.** а) плюс; б) минус; в) минус; г) плюс. **445.** $\sin 30 < 0$, $\cos 30 > 0$, $\mathrm{tg}\, 30 < 0$, $\mathrm{ctg}\, 30 < 0$. **446.** а) $-a\sqrt{-a}$; б) $y^2 \cdot |x| \cdot \sqrt{|x|}$; в) $m^3\sqrt[3]{m}$; г) $-\sqrt[8]{-q}$. **447.** а) $-\sqrt{2-a}$; б) $-\sqrt[4]{b^4c^5}$; в) $\sqrt[7]{x^8z}$; г) $-\sqrt[6]{-4d}$. **450.** а) $-\sin\alpha$;

б) $-\cos\alpha$; в) $\operatorname{tg}\alpha$; г) $\operatorname{tg}\alpha$. **451.** а) $\sin^2\alpha$; б) 0. **452.** а) $[0; 1]$; б) $[0; 3]$. **453.** а) $(\sqrt{m}-\sqrt{n})(m+\sqrt{mn}+n)$; б) $\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x}-2)(\sqrt[4]{x}+2)$; в) $(\sqrt[4]{v}+9\sqrt[4]{s})^2$. **454.** а) $\frac{9+3\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{8}$; б) $\frac{(3+\sqrt{5})(\sqrt[4]{5}-1)}{2}$; в) $(\sqrt[6]{4}-1)(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1)$. **455.** а) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}$; б) $\frac{2}{a-1}$. **456.** а) $-\sin\alpha$; б) $\cos\alpha$; в) $-\operatorname{tg}\alpha$; г) $-\operatorname{tg}\alpha$. **457.** а) 1; б) 0. **458.** а) $\frac{4-2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{5}$; б) $\frac{(3+\sqrt[4]{3})(9+\sqrt{3})}{2}$; в) $(\sqrt[6]{5}+1)(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1)$. **460.** $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{4}{3}$. **463.** $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{1}{5}$, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{26}}$, $\sin\alpha=-\frac{5}{\sqrt{26}}$. **464.** $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha=2\sqrt{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}$. **465.** $\cos\alpha=-\frac{4\sqrt{3}}{7}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{4\sqrt{3}}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-4\sqrt{3}$. **466.** $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{4}$, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{17}}$, $\cos\alpha=\frac{4}{\sqrt{17}}$. **468.** а) $y_{\text{наиб}}=1$; б) $y_{\text{наим}}=-2$; в) $y>0$ при $x\in(-\infty; 0)$ и $y<0$ при $x\in(0; 8]$; г) возрастает при $x\in(-\infty; -1]$, убывает при $x\in[-1; 8]$. **469.** 2. **470.** $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{6}$, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{37}}$, $\sin\alpha=\frac{6}{\sqrt{37}}$. **471.** $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$. **472.** $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{4}{3}$. **473.** $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{5}$, $\sin\alpha=-\sqrt{\frac{5}{6}}$, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{6}}$. **475.** 1) $f(-4)$ не сущ., $f(-2)=-1$, $f(0)=-1$, $f(16)=3$; 2) а) $y_{\text{наиб.}}$ не сущ. и $y_{\text{наим.}}=-2$; б) возрастает при $x\in[-1; +\infty)$, убывает при $x\in[-3; -1]$. **478.** $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$. **479.** $\frac{7}{17}$. **480.** $\frac{33}{65}$. **481.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **483.** а) -3; 3; б) корней нет; в) 2; г) 5; 7; д) $-\frac{27}{8}$; 1; е) -7; 2. **484.** -61; 30. **485.** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **486.** 7. **487.** $\frac{3}{5}$. **488.** 0,5. **489.** а) 2; б) 20; в) -2;1; г) 1. **493.** а) $\sin\alpha$; б) $\cos\alpha$; в) $\sin\alpha$; г) $-\cos\alpha$; д) $\cos\alpha$); е) $-\sin\alpha$. **494.** а) $\cos\alpha$; б) $\sin\alpha$; в) $\cos\alpha$; г) $\cos\alpha$; д) $\sin\alpha$; е) $-\sin\alpha$. **495.** а) $-\operatorname{ctg}\alpha$; б) $\operatorname{ctg}\alpha$; в) $-\operatorname{tg}\alpha$; г) $\operatorname{tg}\alpha$. **496.** а) $-\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) -1; г) $\sqrt{3}$. **497.** -5. **498.** 2. **499.** а) $[2; +\infty)$; б) $[-1; 4]$; в) $[5; +\infty)$; г) $(-\infty; 1]\cup[5; +\infty)$. **500.** а) 1; б) -1; 1. **501.** а) -1; $2\sqrt[3]{4}$; б) $-4{,}5$; 3. **502.** а) $\sin\alpha$; б) $\cos\alpha$; в) $-\sin\alpha$; г) $-\cos\alpha$; д) $\cos\alpha$; е) $-\sin\alpha$. **503.** а) $-\cos\alpha$; б) $\sin\alpha$; в) $-\cos\alpha$; г) $-\cos\alpha$; д) $-\sin\alpha$; е) $\sin\alpha$. **504.** а) $-\operatorname{ctg}\alpha$; б) $\operatorname{ctg}\alpha$; в) $-\operatorname{tg}\alpha$; г) $\operatorname{tg}\alpha$. **505.** а) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) не определен; г) не определен. **506.** -7. **507.** а) $\{-0{,}5; 1{,}5\}$; б) 7; в) $\{-2; 11\}$. **508.** а) 64; б) $\{0; 2\}$. **511.** 6. **512.** 5. **514.** а) $(-\infty; -5{,}5)$; б) $[5; 6)$; в) $[36; +\infty)$; г) $\varnothing$. **515.** а) $[4; 5]$; б) $[-4; -\sqrt{7}]\cup[\sqrt{7}; 4]$; в) $(-\infty; -7)\cup(3; +\infty)$. **517.** $\frac{15}{4}$. **518.** -7. **519.** а) $(17; +\infty)$; б) $(-50; 62{,}5]$; в) $(-\infty; 1{,}75]$; г) $\varnothing$. **520.** а) $(-\infty; -2]\cup[16; +\infty)$; б) $(-5; -3]\cup[3; 5)$; в) $(-13;-2)$. **524.** а) $-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$; б) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$. **525.** $4\cos\alpha\cos2\alpha\sin7\alpha$. **527.** а) $\frac{5}{8}$; б) $-1{,}5$; в) 147; г) 243. **528.** а) $\frac{1}{a^2}$; б) $\frac{x}{y}$. **529.** а) $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\beta$; б) $-\operatorname{tg}\alpha$. **530.** $2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$. **532.** а) $\frac{1}{8}$; б) 1,6. **533.** а) mn; б) 1. **538.** $1+2|\sin\alpha|$. **539.** $\sqrt{3}$. **540.** $\frac{3}{16}$. **542.** а) 0,81; б) 0,45. **543.** а) 0,03; б) 1. **545.** $1+2|\cos\alpha|$. **546.** $\frac{1}{16}$. **548.** а) 28; б) $\frac{a+b}{b-a}$; в) $\frac{2a^2}{1-a}$. **550.** а) $\frac{\pi}{6}$; б) $-\frac{2\pi}{3}$; в) $-\frac{3\pi}{4}$; г) 5π; д) $2{,}6\pi$. **551.** а) IV; б) II. **552.** минус. **553.** а) $-\frac{3}{4}$; б) 3; в) 0. **554.** а) $\operatorname{tg}^2\alpha$; б) $\frac{1}{\sin^2 2^\circ}$; в) 1. **555.** а) 0; б) $-2\operatorname{ctg}\beta$. **557.** а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) 1. **558.** $\frac{14-\sqrt{2}}{4}$. **561.** а) 42; б) 8; в) $\frac{25\pi}{4}$; г) 5π. **562.** а) $(-\infty; -8)\cup(-8; -2)\cup(-2; +\infty)$; б) $(-\infty; 4)\cup(4; 5)\cup(5; +\infty)$; в) $[-5; 0)\cup(0; +\infty)$; г) $(-\infty; 0)\cup[2; +\infty)$; д) $(2{,}5; 4]$; е) $(-5; 2{,}5]$. **563.** а) $E(f)=(-\infty; 0)\cup(0; 5)\cup(5; +\infty)$; б) $E(f)=(-\infty; 0)\cup\left(0; \frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; в) $E(f)=(-\infty; 0]\cup(5; +\infty)$; г) $E(f)=(-1; 0)\cup[0; +\infty)$. **564.** а) $E(f)=[-7; +\infty)$; б) $E(f)=(-\infty; 4]$; в) $E(f)=[-23; 1]$;

г) $E(f) = [-3; +\infty)$. **565.** а) $(-\infty; 1] \cup \left[1\frac{1}{3}; +\infty\right]$; б) $\left[\frac{2}{3}; 1\right]$; в) $[0; 7]$; г) $\{1; 2\}$; д) $(-\infty; -1] \cup \{0\} \cup (1; +\infty)$; е) $(-\infty; 0) \cup [0,5; 3) \cup (3; +\infty)$; ж) $[-1; 1]$; з) $[-6; -1] \cup [1; 6]$. **566.** а) возрастает при $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right]$, убывает при $x \in \left[-\frac{1}{6}; +\infty\right)$; б) возрастает при $x \in \left[\frac{1}{8}; +\infty\right)$, убывает при $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{8}\right]$; в) возрастает при $x \in (-\infty; 3]$, убывает при $x \in [3; +\infty)$; г) возрастает при $x \in [-2; +\infty)$, убывает при $x \in (-\infty; -2]$; д) возрастает при $x \in (-\infty; 2]$, убывает при $x \in [2; +\infty)$; е) убывает при $x \in (-\infty; +\infty)$. **567.** а) $y_{\text{наиб.}} = 5$, $y_{\text{наим.}}$ не сущ.; б) $y_{\text{наиб.}}$ не сущ., $y_{\text{наим.}} = -6$; в) $y_{\text{наиб.}}$ не сущ., $y_{\text{наим.}} = -5$; г) $y_{\text{наиб.}} = 4$, $y_{\text{наим.}}$ не сущ. **568.** а) ни четная, ни нечетная; б) четная; в) нечетная. **569.** (б) и (в). **570.** 13°, 9°, 9°. **571.** На 120 мм рт. ст. **576.** а) $E(f) = [-1; +\infty)$; если $a = 1$, то $x = -5$, $x = -\frac{1}{3}$, $x = 5$; если $a = -1$, то $x = -1$. б) $E(f) = [-4; 4]$; если $a = 1$, то $x = \frac{2}{3}$, если $a = -1$, то $x = -4$, $x = 0$. **580.** а) 1) возрастает при $x \in (-\infty; -1]$ и при $x \in [1; +\infty)$; 2) $y_{\text{наиб.}}$ не сущ., $y_{\text{наим.}}$ не сущ.; 3) $E(f) = (0; +\infty)$; 4) не является; б) 1) возрастает при $x \in [0; 2]$, убывает при $x \in [-9; 0]$; 2) $y_{\text{наиб.}} = 8$, $y_{\text{наим.}} = 0$; 3) $E(f) = [0; 8]$; 4) является. **582.** а) $E(f) = [0; +\infty)$; б) $E(f) = [0; +\infty)$; в) $E(f) = [1; +\infty)$; г) $E(f) = [-1; +\infty)$; д) $E(f) = (-\infty; 0)$; е) $E(f) = (0; +\infty)$; ж) $E(f) = [0; +\infty)$; з) $E(f) = (-\infty; 5]$. **583.** а) $1; \frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{7}; \frac{1}{9}$; б) $\frac{1}{4}; 1; 1\frac{3}{4}; 2,5; 3\frac{1}{4}$. **584.** а) строго убывает; б) строго возрастает; в) строго убывает с 3 номера, нестрого убывает со 2 номера. **585.** а) ограничена; б) не ограничена; в) ограничена. **586.** а) да; б) нет. **587.** а) 5,1; 4,2; 3,3; 2,4; 1,5; 0,6; −0,3; б) −6,5; −4,8; −3,1; −1,4; 0,3. **588.** а) 11 385; б) 4360. **589.** а) 884; б) 6176. **590.** а) да; б) нет. **591.** а) $b_n = 3^{n-1}$; б) $b_n = 5 \cdot 2^{n-1}$. **592.** а) −0,01; б) 0,01. **593.** а) 2; б) 3. **594.** а) 10,22; б) 153 или 51. **595.** а) 4; б) 8. **596.** а) $\frac{5}{9}$; б) $\frac{13}{11}$. **597.** $\frac{27}{2}$ или $\frac{27}{4}$. **598.** а) $x_n = 3^n - 2$; б) $x_n = 3 \cdot (-2)^{n-1} + 1$. **599.** а) 0; ±4; б) 0; $\pm\frac{1}{3}$; в) $\frac{4}{7}$; г) $\frac{4}{5}$; д) 4; е) 5; $\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **600.** а) $\{\pm\sqrt{3}; \pm 2\}$; б) $\{\pm 3\}$; в) $\{\pm 1; \pm\sqrt{2}\}$; г) $\{-1; 0\}$. **601.** а) $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$; б) ±1; в) $(-1; 1)$; г) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; д) $\varnothing$. **602.** $c \in (0; 9)$; 2) $c \in (-\infty; 0) \cup \{16\}$. **603.** а) $\{2\}$; б) $\{-1 \pm \sqrt{2}; 2; -3\}$; в) $\{4 \pm \sqrt{15}\}$; г) $\{3 \pm 2\sqrt{2}; 1\}$. **604.** а) $x^2 - 10x + 23 = 0$; б) $x^2 - 6x + 2 = 0$. **605.** а) $\{3\}$; б) $\{2; 5\}$. **606.** −2. **607.** а) $\{1; 7\}$; б) $\{4; 2\}$; в) $\varnothing$; г) $\{\pm 1; \pm\sqrt{3}\}$; д) $\{7\}$; е) $\{-8; -4\}$. **608.** а) −1; б) 3; в) $\{2; 4\}$; г) $\{-2; 0\}$; д) 0; е) 3. **609.** а) $\{0,5; 2,5\}$; б) $\{-3; 9\}$; в) −1. **610.** а) 0; б) $\frac{7}{8}$. **611.** а) $\{-3\}$; б) $\varnothing$; в) $\varnothing$; г) $\{-8; 2\}$. **612.** а) (5;1); б) (5;−4); в) (5; 2); г) (4; 0,5). **613.** а) $a = -2$ — нет решений; $a \neq -2$ — $\left(\frac{11+5a}{2a+4}; \frac{1}{a+2}\right)$; б) $a = -1$ — $(t - 1; t)$, t — любое; $a \neq -1$ — $(a - 1; -1)$. **614.** а) (−2; −3), (−3; −2), (2; 3), (3; 2); б) (4; 1), (−4; −1); в) (2; 1); г) $\left(\frac{8}{3}; -\frac{4}{3}\right)$; д) (2; 6); (−2; 6); е) (−2; 6); $\left(12; \frac{1}{6}\right)$; ж) (6; 2); (6; −2); (−6; 2); (−6; −2); з) (3; −1), (−3; 1). **615.** а) (15; 30); б) (2; 1); в) (6; 3); $\left(14\frac{1}{3}; -5\frac{1}{3}\right)$. **616.** а) (−1; 2), (2; −1); б) (1; 2), (2; 1), $\{-1 + 2\sqrt{2}; -1 - 2\sqrt{2}\}$, $\{-1 - 2\sqrt{2}; -1 + 2\sqrt{2}\}$. **617.** а) 23 и 26; б) 26 см и 32 см; в) 30 км; г) 12 км и 22 км/ч. **618.** а) 30 мин; б) 70 км/ч; 80 км/ч и 840 км; в) 10 км; г) 100 км/ч; 60 км/ч. **619.** а) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$; б) $[-3; 3]$; в) $(-0,5; 5)$; г) $(-\infty; -2) \cup (0,2; +\infty)$; д) $[2; 3) \cup (3; +\infty)$; е) $\{-1\} \cup [6; +\infty)$. **620.** $[1; +\infty)$. **621.** а) $[-3; 3]$; б) $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$; в) $\{-3\} \cup [1; 5]$; г) $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$; д) $\left\{-\frac{2}{3}\right\} \cup [1,5; +\infty)$; е) $\left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$; ж) $\left[-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}\right]$;

з) $\left(-\infty; -\frac{1}{7}\right] \cup \left[\frac{1}{7}; +\infty\right)$. **622.** а) $(-2; +\infty)$; б) $(-\infty; -4)$; в) $(0,5; +\infty)$; г) $(-\infty; 0,5)$; д) $(-\infty; -2) \cup (0,5; +\infty)$; е) $(-2; 0,5)$; ж) $(-\infty; -1,5) \cup (1,5; +\infty)$; з) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; и) $(-4; 6)$; к) $(-\infty; -6) \cup (4; +\infty)$; л) $(-3; 4)$; м) $(-\infty; -6] \cup [5; +\infty)$. **623.** а) $(-2; 4] \cup (5; +\infty)$; б) $(-\infty; -8) \cup (7; +\infty)$; в) $[1; 4) \cup (4; +\infty)$. **625.** $\frac{1}{5}$. **626.** а) $(-4; -2] \cup$ $\cup [1; 3)$; б) $[-1; 2]$; в) $\{-2\} \cup [\sqrt{7}; +\infty)$. **627.** а) $\left[-\frac{1}{3}; 0\right) \cup [1; +\infty)$; б) $\left(1; \frac{7}{3}\right]$; в) $(-\infty; -\sqrt{5}) \cup \left[\frac{7}{3}; 3\right]$.
628. а) $q^3\sqrt[3]{q}$; б) $p^3\sqrt[5]{p}$; в) $\sqrt[10]{8}$; г) $\sqrt[3]{25}$; д) $\sqrt[5]{m^3}$; е) $\sqrt[3]{v^2}$; ж) $\sqrt{t}$; з) $\sqrt[5]{s^4}$; и) $\sqrt[24]{k^{23}}$; к) $\sqrt[48]{z^{47}}$. **629.** а) 1,5; б) $1\frac{2}{3}$; в) $4a^2\sqrt[3]{5a}$; г) $3b^3\sqrt{3b}$. **630.** а) $2\sqrt{45} > \sqrt{125}$; б) $\frac{1}{4}\sqrt{112} < \frac{1}{2}\sqrt{32}$; в) $\sqrt{\sqrt{5}} > \sqrt[8]{24}$; г) $\sqrt{\sqrt[3]{3}} < \sqrt[3]{2}$; д) $\sqrt[3]{5} < \sqrt[4]{10}$; е) $\sqrt[5]{5} < \sqrt[3]{3}$; ж) $-\sqrt[6]{6000} > -\sqrt{20}$; з) $-\sqrt[3]{20} > -\sqrt{8}$. **631.** а) $\sqrt[3]{50}$; $\sqrt{21}$; 5; $3\sqrt{6}$; $2\sqrt{16}$; б) $\sqrt[3]{100}$; $\sqrt{26}$; $3\sqrt{3}$; 6; $2\sqrt[3]{29}$. **632.** а) -1; б) 5. **633.** а) $\sqrt{2}$; б) 3. **634.** а) $-2a\sqrt{7b}$; б) $-5a^2b\sqrt{5}$; в) $-2xy\sqrt[4]{-2xy^3}$. **635.** а) $\sqrt[4]{3a^4}$; б) $-\sqrt[4]{3a^4}$; в) $-\sqrt{5b^2}$; г) $\sqrt{5b^2}$; д) $\sqrt[6]{3x^5}$; е) $-\sqrt[6]{-3x^5}$; ж) $\sqrt[3]{-\frac{2}{y^2}}$; з) $\sqrt[5]{-y^2}$.
636. а) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; б) $\sqrt[8]{\frac{1}{512}}$; в) $\sqrt[30]{432a}$; г) $\sqrt[14]{2y}$. **637.** а) $\frac{\sqrt[5]{625}}{5}$; б) $\frac{\sqrt[3]{9}}{3}$; в) $\frac{2\sqrt[3]{a^2b}}{ab}$; г) $\frac{2\sqrt[4]{pq^3}}{pq}$; д) $2(\sqrt{7} + \sqrt{5})$; е) $\sqrt{8} - \sqrt{5}$; ж) $3\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{36}$; з) $\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}$; и) $(\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$; к) $(\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{4})(\sqrt{5} + 2)$.
638. $\frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + \sqrt{30}}{12}$. **639.** $\frac{6\sqrt{6} + 6 - 6\sqrt[3]{6} - \sqrt[6]{6^5}}{30}$. **641.** а) 10; б) 10. **642.** а) 2025; б) 15. **643.** а) $\frac{b-a}{a+b}$; б) $\frac{ab}{b-a}$. **644.** 0. **645.** 2 чел; 10%. **646.** 48 ± 10 см². **647.** $x \approx 1,4$. **648.** 1) 24; 2) а) 6; б) 24. **649.** а) 1260; б) 2520. **650.** 90. **651.** а) 120; б) 360. **652.** а) 84; б) 360. **653.** а) 0,729; б) 0,271; в) 0,125; г) 0,875.
654. а) $\frac{70}{71}$; б) 0,1. **655.** $\frac{\pi}{15}$. **656.** Средняя зарплата увеличилась с 520 до 620 руб. Могла. **660.** 1) а) 80 мин; б) 90 мин; в) 70 мин; 2) 130 мин; $S^2 \approx 1590$. **669.** а) нет; б) нет. **667.** 11.

Ответы к итоговому тесту: **1.** А. **2.** Б. **3.** В. **4.** А. **5.** В. **6.** а1 б4 в2. **7.** $\sqrt[3]{50}$; 4; $\sqrt{23}$; $2\sqrt{9}$; $3\sqrt{7}$.
8. $\{-2; 6\}$. **9.** 55. **10.** 5. **11.** 10. **12.** 125 000. **13.** $(3; -6)$. **14.** 9. **15.** $b = \frac{4SR}{ac}$. **16.** $[-10;10]$. **17.** 96. **18.** 5.
19. 2,4. **20.** Соколов. **21.** $\frac{3}{8}$. **22.** 20. **23.** 60 км/ч. **24.** 22 км/ч. **25.** 60% и 80%. **26.** $-6,25$; -4; 6.

Предметный указатель

Оглавление

Петерсон Людмила Георгиевна
Агаханов Назар Хангельдыевич
Петрович Александр Юрьевич
Подлипский Олег Константинович
Рогатова Марина Викторовна
Трушин Борис Викторович

АЛГЕБРА

9 класс

Часть 2 (6+)

Учебник

Ответственный за выпуск *Ю. И. Веслинский*
Художники *П. А. Северцов, С. Ю. Гаврилова, А. Ю. Горнов*
Художественный редактор *Л. Г. Журбицкая*
Технический редактор *М. В. Лебедева*
Компьютерная верстка *Е. И. Беликова*
Корректор *О. Б. Андрюхина*

Подписано в печать 08.08.2016. Формат 84x108/16. Объем 12,5 печ. л. 21,00 усл. печ. л.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Школьная.
Тираж 1001—1500 экз. (2-й завод). Заказ № 6482.

ООО «С-инфо»

(Издательство «Ювента» — структурное подразделение
и зарегистрированный товарный знак ООО «С-инфо»)
121059 Москва, а/я 88 **Телефон:** (495) 796-92-93 **Факс:** (495) 796-92-99
E-mail: booksale@si.ru **Адрес в Интернете:** www.books.si.ru

Отпечатано в типографии ООО «Буки Веди»
119049, г. Москва, Ленинский проспект, д. 4, стр. 1А
Тел.: (495) 926-63-96, www.bukivedi.com, info@bukivedi.com

Таблицы степеней

Таблица квадратов натуральных чисел от 11 до 99

ДЕСЯТКИ	ЕДИНИЦЫ								
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Таблица степеней чисел 2, 3, 4 и 5

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19 683	59 049
4^n	1	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	1048576
5^n	1	5	25	125	625	3125	15 625	78 125	390 625	1 953 125	9 765 625